



# Création et éjection des gouttes de l'atomisation

Gounseti Nimonoka Pare

## ► To cite this version:

Gounseti Nimonoka Pare. Création et éjection des gouttes de l'atomisation. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2015. Français. NNT : 2015PA066318 . tel-01255880

**HAL Id: tel-01255880**

**<https://theses.hal.science/tel-01255880>**

Submitted on 14 Jan 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE  
(UPMC - PARIS VI)**

Spécialité

**MÉCANIQUE DES FLUIDES**  
(Ecole doctorale : SMAER 391)

Présentée par

**Gounséti PARE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Sujet de thèse

**Création et éjection des gouttes de l'atomisation**

Thèse soutenue à l'UPMC le 07 Septembre 2015 devant le jury composé de :

Christophe CLANET	LadHyX	Rapporteur
Philippe BRUNET	MSC	Rapporteur
Laurent LIMAT	MSC	Examineur
Christophe JOSSERAND	IJLRA	Examineur
Stéphane ZALESKI	IJLRA	Directeur de thèse
Jérôme HOEPFFNER	IJLRA	Co-directeur

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>15</b>
1.1	Les applications de l'atomisation . . . . .	15
1.2	Description du phénomène d'atomisation . . . . .	17
1.2.1	L'étape de la formation des ligaments . . . . .	18
1.2.2	La tension de surface . . . . .	19
1.2.3	Cas des ligaments finis . . . . .	22
1.3	Dynamique de la segmentation : solutions auto-semblables . . . . .	28
1.3.1	Cas non visqueux . . . . .	28
1.3.2	Cas d'un ligament visqueux . . . . .	29
1.4	Organisation du manuscrit . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Le logiciel Gerris flow solver</b>	<b>39</b>
2.1	Introduction . . . . .	39
2.2	Maillage . . . . .	40
2.3	Résolution numérique des équations de Navier-Stokes . . . . .	40
2.3.1	Discretisation temporelle . . . . .	42
2.3.2	Discretisation spatiale . . . . .	43
2.4	Schéma d'advection Volume Of Fluid (VOF) . . . . .	44
2.4.1	Évaluation de la tension de surface . . . . .	47
2.5	Conclusion . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Segmentation capillaire : phénomène d'évitement de l'étranglement</b>	<b>57</b>
3.1	Introduction . . . . .	57
3.2	Simulations Numériques . . . . .	59



3.2.1	Historique sur notre première observation du phénomène d'évitement . . . . .	59
3.2.2	Simulations numériques de la segmentation des ligaments liquides	61
3.3	Nos expériences sur l'évitement . . . . .	67
3.3.1	Comportement de l'écoulement à travers le cou du ligament lors de sa segmentation ou de son évitement . . . . .	68
3.4	Cas des ligaments visqueux : théorie linéaire . . . . .	70
3.5	Analyse du mécanisme . . . . .	72
3.6	Segmentation de ligaments entiers . . . . .	73
3.6.1	Analyse du graphique 3.9 . . . . .	76
3.7	Cas des ligaments courts . . . . .	77
3.8	Taille des gouttes par l'évitement . . . . .	79
3.9	Généralité du phénomène d'évitement . . . . .	80
3.9.1	Cas du jet de fluide impulsif . . . . .	80
3.9.2	Rétractation du cône liquide . . . . .	81
3.10	Conclusion . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Stabilité du pont capillaire</b>	<b>93</b>
4.1	Introduction . . . . .	93
4.2	Description du modèle de simulation . . . . .	97
4.2.1	L'interface solide/liquide/air . . . . .	97
4.2.2	Le maillage . . . . .	98
4.3	Nos simulations . . . . .	99
4.3.1	Cas statique : étude classique de la stabilité du pont capillaire, validation des nos simulations . . . . .	100
4.3.2	Cas dynamique : introduction de débit dans le pont capillaire .	101
4.4	Résultats . . . . .	103
4.5	Évolution de la frontière d'instabilité dans le cas dynamique . . . . .	107
4.6	Études expérimentales . . . . .	108
4.6.1	Dispositif expérimental . . . . .	109
4.6.2	Résultats . . . . .	110
4.6.3	Comparaisons expériences/simulations . . . . .	114
4.7	Conclusion . . . . .	117
<b>5</b>	<b>Pont capillaire : diagramme de bifurcation</b>	<b>125</b>
5.1	Introduction . . . . .	125
5.2	Les équations de Eggers & Dupont . . . . .	126

5.3	Étude générale d'un système dynamique . . . . .	127
5.3.1	Les points d'équilibre : solutions statiques . . . . .	127
5.3.2	Les branches de solutions statiques . . . . .	128
5.3.3	Étude de la stabilité . . . . .	128
5.3.4	Étude de la bifurcation des solutions statiques . . . . .	131
5.4	La linéarisation des équations de Eggers & Dupont . . . . .	132
5.5	Analyse de la stabilité . . . . .	134
5.6	La procédure numérique . . . . .	134
5.6.1	La méthode de Continuation . . . . .	134
5.7	Résultats . . . . .	138
5.7.1	Validation du code . . . . .	138
5.7.2	Comparaisons avec nos simulations . . . . .	139
5.7.3	Influence du nombre d'Ohnesorge . . . . .	144
5.8	Conclusion . . . . .	145
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>153</b>
6.1	Perspectives . . . . .	155
6.1.1	Études expérimentales sur le pont capillaire . . . . .	155
6.1.2	Distribution de la taille des gouttes dans les jets . . . . .	156
<b>7</b>	<b>Annexes</b>	<b>165</b>
7.1	Les fichiers de paramètres Gerris . . . . .	165
7.1.1	Segmentation capillaire . . . . .	165
7.1.2	Rétractation de cône liquide . . . . .	167
7.1.3	Le pont capillaire dynamique . . . . .	169
7.2	Code Matlab . . . . .	172
7.2.1	Diagramme de bifurcation : code 1D des équations de Eggers & Dupont . . . . .	172



## TABLE DES FIGURES

1.1	Différentes manifestations du phénomène d'atomisation dans la vie quotidienne. <b>(a)</b> : un filet d'eau pendant du robinet sous la gravité. <b>(b)</b> : peinture au pistolet, cela consiste à propulser la peinture sous forme de gouttelettes sur la surface à peindre. <b>(c)</b> : déclenchement d'un sprinkler (tête d'extinction automatique à eau) lors d'un incendie. <b>(d)</b> : spray ou vaporisateur de parfum. . . . .	16
1.2	Fragmentation d'un jet liquide à haute vitesse en contact avec de l'air initialement au repos (Hoyt & Taylor [21]), un zoom sur la surface du jet montre la formation de ligaments se déstabilisant en gouttelettes. .	17
1.3	Un mécanisme commun dans tout processus d'atomisation : la formation de ligaments se fragmentant en gouttelettes. <b>(a)</b> : fragmentation de jet par un écoulement d'air transverse [34]. <b>(b)</b> : goutte d'huile sur une plaque vibrante à haute fréquence [22], <b>(c)</b> : fragmentation d'une nappe liquide issue de l'impact de deux jets [7]. <b>(d)</b> : déstabilisation d'un jet tournant [26]. <b>(e)</b> : développement ultime de l'instabilité de Faraday [67]. <b>(f)</b> : fragmentation d'un filet d'eau du robinet [URL]. <b>(g)</b> : atomisation électrostatique [39]. . . . .	18
1.4	Différentes manifestations de la tension de surface. <b>(a)</b> : goutte d'eau sur une feuille, qui tient sa forme de la tension superficielle [URL]. <b>(b)</b> : formation d'une bulle de savon [URL]. <b>(c)</b> : flottaison d'un trombone à la surface de l'eau [URL]. <b>(d)</b> : image d'un gerris qui flotte sur la surface de l'eau grâce à la tension de surface [URL]. . . . .	20

1.5	Instabilité de Rayleigh-Plateau. <b>(a)</b> : observations de la fragmentation d'un jet liquide très fin [54]. <b>(b)</b> : déstabilisation du cylindre liquide lorsqu'il est perturbé par une longueur d'onde plus grande que son périmètre [42] (1849). <b>(c)</b> & <b>(d)</b> : expériences de Rayleigh [49] (1891), sur la rupture du jet liquide. . . . .	22
1.6	<b>(a)</b> : expérience de nucléation de trou dans un film de savon [29]. <b>(b)</b> : description schématique de la rétractation du bourrelet, coupe transversale de la nappe liquide (le schéma est de A. Antkowiak). . . . .	24
1.7	Description schématique de la formation du bourrelet . . . . .	25
1.8	Rétractation capillaire. <i>(a)</i> : les expériences de Stone [62] sur les ligaments visqueux. <i>(b)</i> : simulations numériques de Schulkes [58] sur la rétractation capillaire, évolution temporelle du rayon du cou du ligament pour différents nombres d'Ohnesorge. <i>(c)</i> : simulations numériques sur la rétractation capillaire de Notz et al. [40] . . . . .	26
1.9	Détermination de la frontière entre : "le ligament se segmente" pour faire des gouttes et "le ligament ne se segmente pas". <b>(a)</b> : les expériences de Castrejón-Pita [9] pour deux ligaments de nombre d'Ohnesorge et de rapports d'aspects différents. <b>(b)</b> : les résultats de Castrejón-Pita [9] sur le diagramme comportemental des ligaments. <b>(c)</b> : schéma de la forme du ligament perturbé par une onde d'amplitude $\delta$ [14]. <b>(d)</b> : la frontière analytique obtenue par Driessen [14], comparaison avec les résultats de Castrejón-Pita [9]. . . . .	27
1.10	<b>(a)</b> : formation de cône liquide après segmentation de ligament visqueux [65]. <b>(b)</b> : les solutions auto-semblables du cône liquide non visqueux. <b>(c)</b> : les solutions auto-semblables du ligament visqueux juste avant et après sa segmentation [15]. . . . .	30
2.1	Représentation schématique de discrétisation en "quadtree" (à gauche) et sa correspondante en structure d'arbre (à droite). . . . .	40
2.2	Principe de la méthode de VOF. <b>(a)</b> : construction de l'interface par la fonction couleur. <b>(b)</b> : reconstruction de l'interface basée sur le calcul des pentes de l'interface dans chaque cellule. . . . .	45
2.3	Estimation du flux géométrique. <b>(a)</b> : estimation du flux de $C_a$ (délimité en pointillés, avec (en gris) la fraction volumique occupée par la phase 1 du fluide) de la cellule $C$ , advecté vers la droite à la vitesse $U^{i+1/2,j}$ dans une cellule voisine de même niveau. <b>(b)</b> : cas de l'estimation du flux entre des cellules de niveaux différents . . . . .	46

3.1	(a) : analyse simplifiée de la réduction de surface de la parabole liquide. Il s'agit de trouver, pour $V_0 = V_1 + V_2$ , la hauteur critique $\lambda_c$ correspondante à $S_0 = S_1 + S_2$ . (b) : évolution de hauteur critique correspondant à la réduction de surface en fonction de la forme du ligament $r = az^\alpha$ . .	60
3.2	Condition initiale : $\sigma = 1$ , $\rho = 1$ , $\mu$ est un paramètre variable. La longueur initiale du ligament semi-infini est $L = 47.5R$ , assez long pour se fragmenter. . . . .	61
3.3	Simulation numérique de la rétractation d'un ligament non visqueux. Position de l'interface dans le repère spatio-temporel. Les interfaces obtenues par Schulkes [58] sont tracées ici en pointillés en couleur rouge. .	63
3.4	Simulation numérique de la rétractation d'un ligament visqueux ( $Oh = 0.01$ ). a) : position de l'interface dans le repère spatio-temporel en trait continu, en pointillés les données de Schulkes (1996). Évolution de l'interface, la pression et la vitesse au niveau du cou lors de la segmentation b) et de l'évitement c). . . . .	64
3.5	Simulation numérique de la rétractation de ligaments semi-infinis, évitement successifs lorsqu'on augmente $Oh$ . Un évitement puis segmentation pour $Oh = 0.001$ , deux évitements successifs puis segmentation pour $Oh = 0.01$ , ainsi de suite. . . . .	66
3.6	Expérience sur le phénomène d'évitement : une colonne liquide contenue préalablement dans une paille est lâchée en chute libre. Celle-ci se rétracte pendant sa chute libre, un cou se forme et tend à segmenter la colonne en deux. Brusquement le cou se réouvre et l'étranglement est évité . . . . .	67
3.7	Observation expérimentale de l'anneau tourbillonnaire lors de l'évitement. a) trajectoire des particules après évitement, formation d'anneau tourbillonnaire. b) Pour $Oh$ inférieur à $Oh_c$ , pas de détachement de jet. c) Pour $Oh$ supérieur à $Oh_c$ , un détachement du jet avec création d'anneaux tourbillonnaires. d) : zoom sur la zone de l'étranglement lors du mécanisme de l'évitement. . . . .	69
3.8	Description schématique de la région de segmentation d'un ligament. (1) : description de la formation du bourrelet. (2) : description du mécanisme de l'évitement de l'étranglement. . . . .	72

3.9	Rapport d'aspect en fonction de $Oh$ : les carrées rouges sont les points de segmentation, les points bleus, ceux de l'évitement qui résultent de nos simulations. Données numériques et expérimentales (en gris) de rétraction de ligaments par Castrejón-Pita (2012). La figure est celle de Driessen [14], qui est une reprise de Castrejón-Pita. . . . .	74
3.10	Évolution temporelle du cou du ligament pour différents Ohnesorge. Pour $Oh = 0.01$ , on a une segmentation directe comme le cas pour tous les ligaments non visqueux. Les données de Schulkes [58], pour $Oh = 0$ , sont tracées en couleur grise. Le cas $Oh = 0.01$ évite une fois puis se segmente, celui du $Oh = 0.02$ va éviter deux fois avant de se segmenter, ainsi de suite. . . . .	75
3.11	Comparaison entre le ligament entier de rapport d'aspect $L_o/R$ et le ligament semi-infini ( $L = 47.5R$ ) lorsque $L_o/R$ est petit. . . . .	77
3.12	Comparaison du rayon du cou du le ligament entier de longueur $L_o/R = 17$ et du ligament semi-infini de longueur $L = 47.5R$ . . . . .	79
3.13	Volume des gouttes résultant de la segmentation des ligaments pour différents nombres de Ohnesorge, par rapport au volume d'une goutte qui résulterait de la segmentation d'un ligament se rétractant à la vitesse de Taylor-Culick. Plus le ligament est visqueux, plus il évite de se segmenter et la goutte issue de la segmentation est plus volumineux. . .	81
3.14	Généralité du phénomène d'évitement. <b>a)</b> : rétraction du cône liquide. <b>b)</b> : évitement du jet issu de l'impact d'un tube rempli d'eau sur un substrat solide. . . . .	82
3.15	Rétraction du cône liquide : condition initiale. Le cône liquide (de densité $\rho = 1$ , de viscosité nulle $\mu = 0$ , de tension de surface $\sigma = 1$ ) est entouré d'un liquide non visqueux et cent fois moins dense. . . . .	83
3.16	<b>(a)</b> : solutions auto-semblables pour différents angles d'ouverture du cône liquide, la figure est tirée de l'article de Sierou et al. [60]. <b>(b)</b> : comparaison avec les résultats des simulations. . . . .	84
3.17	Rétraction du cône liquide de demi-angle au sommet $\theta = 0.075$ <i>radian</i> et de hauteur $L = 30$ : lâcher d'un anneau tourbillonnaire à l'intérieur du cône liquide, qui dévie la rétraction du cône de la solution auto-semblable de Sierou [60]. . . . .	85
4.1	Modèle de simulation du pont capillaire . . . . .	95

4.2	Écoulement dans un pont capillaire dynamique, comparaison avec l'écoulement à travers le cou d'un ligament liquide lors de sa rétractation : le Venturi capillaire. Les images sont de vraies captures issues de nos simulations numériques. . . . .	96
4.3	Description schématique de différentes manières de placer initialement les interfaces liquide/gaz et solide/liquide (zoom sur le point triple du tube d'entrée du pont). <b>(a)</b> : les interfaces liquide/gaz et solide/liquide sont à la même hauteur. <b>(b)</b> : l'interface solide/liquide est placée à une hauteur plus basse que l'interface liquide/gaz. . . . .	97
4.4	Description schématique du protocole de simulation. <b>(a)</b> : cas statique, nous fixons le rapport d'aspect du pont et imposons un débit de pompage du pont jusqu'au claquage. <b>(b)</b> : cas dynamique, le rapport d'aspect et le volume du pont restent constants et nous augmentons progressivement le débit dans le pont jusqu'au claquage. . . . .	99
4.5	Comparaison des diagrammes de stabilité. <b>(a)</b> : courbe de stabilité du pont capillaire de Slobozhanin [61], figure tirée de son article. <b>(b)</b> : comparaison avec les résultats de nos simulations, pour $V_0/V_{cyl} \leq 1$ et $Bo = 0$ . . . . .	101
4.6	Données du Table 5.1, $L/R = 2$ en haut et $L/R = 3$ en bas. . . . .	104
4.7	Données du Table 5.1, $L/R = 4$ en haut et $L/R = 5$ en bas. . . . .	105
4.8	Résumé graphique des différents comportements du pont capillaire dynamique. Description schématique de l'évolution du rayon du cou en fonction du nombre de Weber, de trois volumes représentatifs ( $V_1, V_2, V_3$ ). Les séquences temporelles des interfaces du pont sont issues des nos simulations. . . . .	106
4.9	Évolution de la frontière d'instabilité lorsqu'on augmente le débit dans le pont. Apparition de la zone d'oscillation lorsque le débit dans le pont est assez grand. . . . .	108
4.10	Dispositif expérimental pour étudier la stabilité du pont capillaire statique.	109
4.11	Cas statique : comparaison avec les expériences de Slobozhanin [61], pour 4 nombres de Bond différents. De meilleurs accords sont obtenus pour les plus grands nombres de Bond. . . . .	111
4.12	Cas dynamique : évolution de la frontière d'instabilité en fonction du débit dans le pont, pour deux nombres de Bond différents, $Bo = 0.56$ en haut et $Bo = 0.30$ en bas. Les frontières d'instabilité, dans les cas statiques ( $We = 0$ ), sont en parfait accord avec Slobozhanin [61]. . . . .	113



4.13	(a) : évaluation de la courbe de stabilité du pont capillaire (par simulations numériques) par deux méthodes différentes, la méthode normale et la méthode expérimentale. À débit faible, ces deux méthodes prédisent la même frontière de stabilité. (b) : Comparaison simulations/expériences pour $Bo = 0.55$ . La frontière d'instabilité numérique (simulation Gerris (méthode normale), $L/R = 2$ en gris), se trouve bien encadrée par celles obtenues expérimentalement. . . . .	115
4.14	Évolution d'une ligne de pixel, représentant le diamètre du cou, en temps pour différents Weber, ( $L/R = 2.3, Bo = 0.55$ ). Apparition des oscillations non linéaires lorsque $We > 0.22$ . . . . .	116
5.1	Stabilité linéaire, exemple classique d'étude de la stabilité du système dynamique de bille sur une boule. Toute perturbation de la bille dans sa première position la ramène à sa position de départ : cette position est donc stable (schéma 1, "original state"). Inversement, toute perturbation de la bille dans sa deuxième position conduit irrémédiablement à sa chute : la position est donc instable (schéma 2, "original state"). . . . .	130
5.2	Description schématique du pont capillaire. . . . .	132
5.3	Méthode de continuation numérique "pseudo arc-length" . . . . .	136
5.4	Diagramme de bifurcation, $V/V_0$ en fonction de la pression $P$ . Comparaison avec les résultats de [32] : la figure vient de l'article de [32], sur laquelle sont tracés les résultats du code 1D basé sur les équations de Eggers & Dupont. . . . .	138
5.5	Comparaison du diagramme de bifurcation (DNS, 1D) pour le cas $L/R = 4$ et pour deux valeurs de volumes $V_0/V_{cyl} = 0.67, 0.93$ . . . . .	140
5.6	Évolution du rayon du cou du pont capillaire en fonction du nombre de Weber. Données de la Table 5.1, $L/R = 2$ . . . . .	142
5.7	Évolution du rayon du cou du pont capillaire en fonction du nombre de Weber. Données de la Table 5.1, $L/R = 3$ . . . . .	142
5.8	Évolution du rayon du cou du pont capillaire en fonction du nombre de Weber. Données de la Table 5.1, $L/R = 4$ . . . . .	143
5.9	Évolution du rayon du cou du pont capillaire en fonction du nombre de Weber. Données de la Table 5.1, $L/R = 5$ . . . . .	143
5.10	Influence de la viscosité sur le diagramme de bifurcation. Cas de $L/R = 2$ et $V_0/V_{cyl} = 0.9$ , pour les différentes viscosités $\nu = 0, 1e - 2, 2e - 2, 2.5e - 2, 2.95e - 2$ . . . . .	144

6.1	Observations des oscillations circulaires du pont capillaire lorsque le débit devient grand. <b>(a)</b> : $Q = 20ml/s$ , $L1/R \approx 1$ , $V_{c2} \approx 0.5$ . <b>(b)</b> : $Q = 20ml/s$ , $L2/R \approx 1.8$ , $V_{c2} \approx 0.63$ . . . . .	155
6.2	Fragmentation d'un jet issu de l'éclatement d'une bulle à la surface d'un bain liquide [18]. Fragmentation du jet en un train de gouttelettes de même taille environ (première expérience : première ligne). Dans la deuxième expérience (deuxième ligne), la troisième goutte du jet fait environ 2 fois la taille des deux premières. . . . .	157
6.3	Séquence temporelle plus détaillée de la fragmentation du jet dans la deuxième expérience [18]. Observation du phénomène d'évitement, responsable du grossissement de la troisième goutte du jet. . . . .	158



# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

### Sommaire

1.1	Les applications de l'atomisation . . . . .	15
1.2	Description du phénomène d'atomisation . . . . .	17
1.3	Dynamique de la segmentation : solutions auto-semblables	28
1.4	Organisation du manuscrit . . . . .	29

Le présent document est consacré à l'étude des phénomènes de l'atomisation, plus précisément à l'étude des gouttes issues de l'atomisation, de leurs formations et leurs éjections. L'atomisation (littéralement, l'action de réduire à l'état d'atome ou de particules) est l'ensemble des instabilités par lesquelles un volume liquide va se fragmenter en un nuage de gouttelettes.

## 1.1 Les applications de l'atomisation

D'une manière générale nous trouvons le corps liquide sous une forme homogène (l'océan, le carburant de moteur, la peinture ou l'encre d'imprimante), mais pour des besoins quotidiens (peinture à pistolet, jet d'encre sur papier, brûleur d'essence), nous l'utilisons plutôt sous sa forme de gouttelettes. Nous retrouvons donc couramment, dans notre quotidien, la présence des phénomènes d'atomisation. Cela va des dernières gouttes d'eau du robinet aux chambres de combustion des moteurs. En effet, dans l'industrie automobile, l'atomisation est utilisée dans les chambres à combustion des moteurs à injection directe, pour pulvériser le jet de carburant en de fines gouttelettes. Ce qui permet de brûler plus efficacement le carburant en augmentant la surface d'échange entre le carburant et les étincelles des bougies dans le moteur. Elle est égale-

ment utilisée dans le processus de refroidissement du cœur des centrales nucléaires par pulvérisation des liquides de refroidissement. La pulvérisation des liquides sur les terrains agricoles, la fragmentation d'un jet d'encre en gouttelettes à la sortie d'une buse d'imprimante pour impacter sur les surfaces des papiers et ainsi dessiner des lettres, sont autant de situations industrielles où le phénomène d'atomisation intervient. Le contrôle de l'impact des jets de l'imprimante sur la surface du papier nous permet aujourd'hui d'embellir les caractères de nos documents.

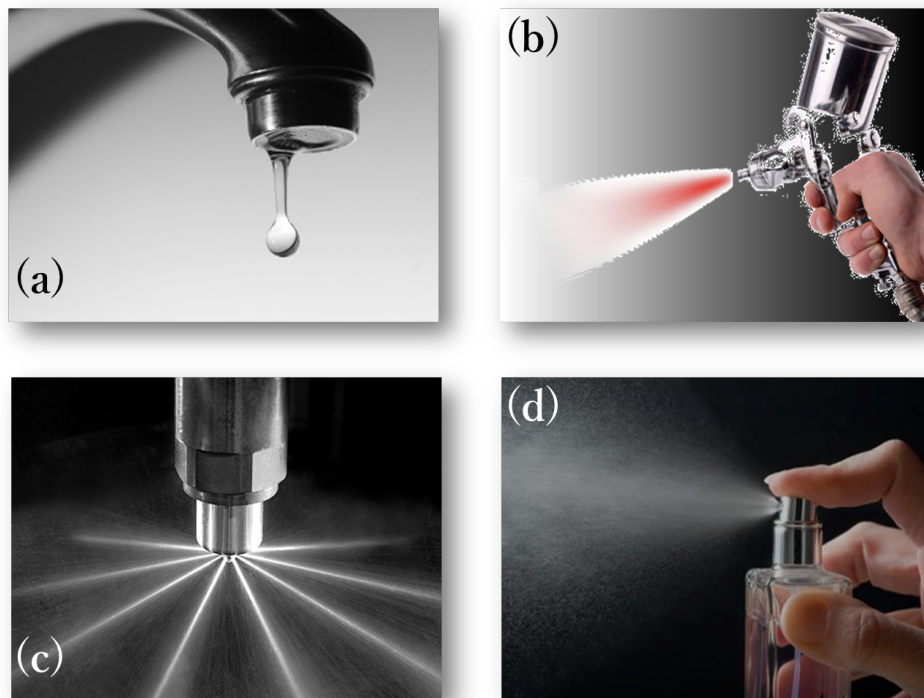


FIGURE 1.1 – Différentes manifestations du phénomène d'atomisation dans la vie quotidienne. **(a)** : un filet d'eau pendant du robinet sous la gravité. **(b)** : peinture au pistolet, cela consiste à propulser la peinture sous forme de gouttelettes sur la surface à peindre. **(c)** : déclenchement d'un sprinkler (tête d'extinction automatique à eau) lors d'un incendie. **(d)** : spray ou vaporisateur de parfum.

Au delà de ces applications industrielles, l'atomisation a aussi une dimension géophysique comme les interactions océan/atmosphère. La création des embruns à la plage en est un exemple [5](1967). Ceux ci sont le plus souvent issus du déferlement des vagues sur les côtes sous forme de nuage de gouttelettes.

## 1.2 Description du phénomène d'atomisation

On peut comprendre, au vu des diverses applications présentées, l'attention que portent les chercheurs à la compréhension du mécanisme de l'atomisation. Des machines, appelées des atomiseurs ont été créées et perfectionnées en vue de rendre plus efficace le processus d'atomisation (voir [3] (1993)). Dans leur livre "Liquid Atomization", Bayvel & Orzechowski ont fait une classification des différents atomiseurs qui existent. Le plus simple de ces atomiseurs, consiste simplement à faire émerger un jet liquide à haute vitesse d'une buse pour le fragmenter. Quelques années plus tard, Hoyt & Taylor [21] (1977) ont étudié la déstructuration de ce type d'écoulement. La figure 1.2 montre la fragmentation d'un jet liquide à haute vitesse en contact avec de l'air initialement au repos. Cette image est particulièrement intéressante car elle regroupe les différentes instabilités qui se succèdent, depuis la sortie du liquide de la buse sous sa forme homogène jusqu'aux apparitions des premières gouttes.

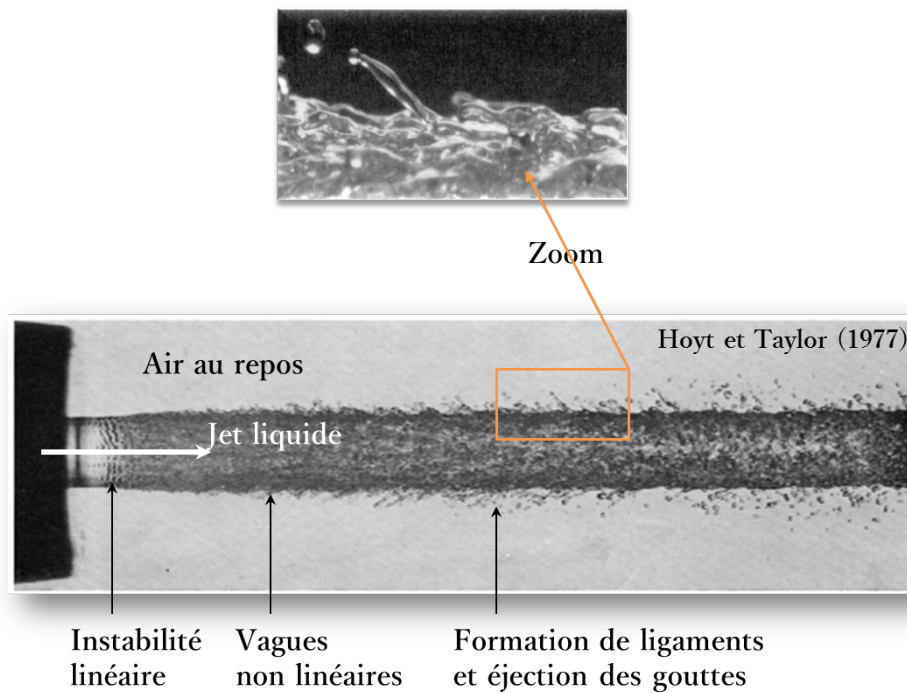


FIGURE 1.2 – Fragmentation d'un jet liquide à haute vitesse en contact avec de l'air initialement au repos (Hoyt & Taylor [21]), un zoom sur la surface du jet montre la formation de ligaments se déstabilisant en gouttelettes.

On remarque tout d'abord les instabilités linéaires juste après la sortie du jet de la buse. Ces instabilités vont très vite faire place aux vagues non linéaires, puis à la formation des ligaments liquides qui vont se déstabiliser pour donner des gouttelettes.

Grâce à ces études, Hoyt & Taylor (1977) ont montré que l'atomisation, au-delà d'une certaine vitesse d'injection, passe toujours par une phase de formation de ligaments liquides, qui vont s'étirer, se rétrécir, puis se déstabiliser en gouttelettes, comme le montre le zoom sur la surface du jet.

### 1.2.1 L'étape de la formation des ligaments

Plusieurs observations de différents phénomènes d'atomisation confirment la formation des ligaments qui vont se fragmenter en gouttelettes. La figure 1.3 est une concaténation des plusieurs observations du mécanisme d'atomisation.

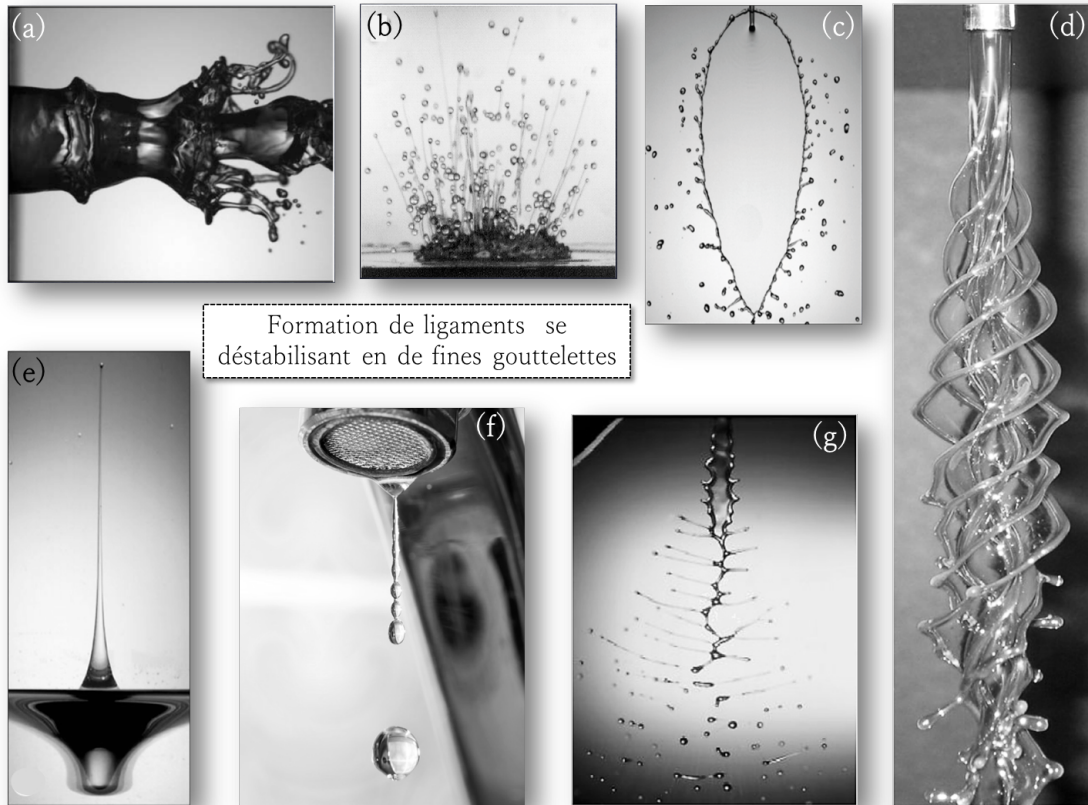


FIGURE 1.3 – Un mécanisme commun dans tout processus d'atomisation : la formation de ligaments se fragmentant en gouttelettes. **(a)** : fragmentation de jet par un écoulement d'air transverse [34]. **(b)** : goutte d'huile sur une plaque vibrante à haute fréquence [22], **(c)** : fragmentation d'une nappe liquide issue de l'impact de deux jets [7]. **(d)** : déstabilisation d'un jet tournant [26]. **(e)** : développement ultime de l'instabilité de Faraday [67]. **(f)** : fragmentation d'un filet d'eau du robinet [URL]. **(g)** : atomisation électrostatique [39].

- La première image (figure 1.3, **(a)**) montre la fragmentation d'un jet liquide par un écoulement d'air transverse, qui vient à grande vitesse cisailer la surface du liquide (l'image vient de la thèse de Philippe Marmottant [34] (2001) sur l'atomisation d'un liquide par un courant gazeux). Des instabilités de Kelvin-Helmholtz [64, 37] vont se développer sur l'interface liquide/air pour former des ligaments fins, qui se fragmenteront en gouttelettes.
- Ces ligaments sont également observés lorsqu'on dépose une goutte d'huile sur une plaque vibrante à haute fréquence (figure 1.3, **(b)**). Le mécanisme responsable de la désintégration est ici l'instabilité de Faraday, correspondant à une accélération sinusoïdale [22] (2000).
- C'est aussi le cas lors de la fragmentation d'une nappe liquide formée par l'impact oblique de deux jets identiques (figure 1.3, **(c)**). Au delà d'une vitesse d'impact critique, on observe la formation de ces ligaments (voir la thèse de Nicolas Bremond [7]).
- On observe aussi ces ligaments lors de la déstabilisation d'un jet tournant (figure 1.3, **(d)** [26])
- D'autres cas comme le développement ultime de l'instabilité de Faraday d'un liquide dont on fait vibrer la surface, illustré sur la figure 1.3, **(e)** de [67], ou encore les ligaments fins du robinet lorsque le débit est très faible (1.3, **(f)**), montrent aussi l'étape de la formation de ligaments avant l'apparition des gouttelettes.
- Une autre manière de faire des gouttes est l'atomisation électrostatique [39] (2000). Il s'agit de charger le liquide par contact avec une électrode. Instantanément, toutes les charges se disposent à la surface du liquide. Par répulsion Coulombienne, les charges vont promouvoir une augmentation de l'interface du liquide, inversement à la force de cohésion du liquide. À la surface libre du liquide, le champ électrique est purement radial. Lorsque l'influence de celui-ci surpasse les effets de la capillarité, on observe les effets décrits sur la figure 1.3, **(g)**.

Au vu de ces différentes observations, la "formation de ligaments qui se fragmentent en gouttelettes" devient une piste privilégiée pour comprendre le mécanisme de l'atomisation. On peut donc se poser une question évidente : comment se fait la déstabilisation d'un ligament en gouttelettes ?





FIGURE 1.4 – Différentes manifestations de la tension de surface. **(a)** : goutte d'eau sur une feuille, qui tient sa forme de la tension superficielle [URL]. **(b)** : formation d'une bulle de savon [URL]. **(c)** : flottaison d'un trombone à la surface de l'eau [URL]. **(d)** : image d'un gerris qui flotte sur la surface de l'eau grâce à la tension de surface [URL].

### 1.2.2 La tension de surface

L'un des premiers résultats expliquant la physique produisant la rupture de ligaments liquides en gouttes a été trouvé par Laplace [28] (1805), en identifiant la tension de surface comme responsable de l'instabilité entraînant cette rupture. Cette tension minimise l'énergie de surface et est responsable de la forme sphérique de gouttes et bulles (figure 1.4, **(a)** & **(b)**), car pour un volume donné la sphère est la forme mathématique qui possède le minimum de surface. La flottaison d'un trombone à la surface de l'eau (figure 1.4 **(c)**), ou d'un gerris à la surface d'un lac (figure 1.4 **(d)**), sont possibles grâce à cette force. La tension de surface est une énergie de surface des liquides qui, d'une certaine manière, agit comme la membrane d'un ballon de baudruche gonflé. Et comme pour un ballon gonflé, la tension de la membrane va avoir tendance à comprimer l'air contenu dans le ballon. Cela suppose un saut de pression au travers de l'interface du liquide : c'est le saut de pression capillaire (également appelée pression de Laplace), proportionnel à la courbure de l'interface. La tension de surface est aussi responsable (dans sa fonction de minimiser la surface liquide) de la rétractation de la

nappe liquide ou du ligament.

Paradoxalement, cette force de cohésion surfacique des molécules du liquide est également responsable de sa fragmentation : car la tension de surface agit rapidement et dans certains cas, il est plus facile de fragmenter le ligament en plusieurs gouttes plutôt que de regrouper tout le volume liquide en une seule goutte, qui requiert une énergie considérable.

La recherche à eu une compréhension beaucoup plus approfondie sur la formation de gouttes à partir des ligaments, après les travaux de Savart [54] (1833) qui, dans sa quête de la compréhension de la désintégration des jets liquides, a été le premier à reconnaître que la fragmentation des jets liquides est régie par des lois indépendantes des circonstances dans lesquelles les jets sont produits. Il observe que la rupture se produit toujours indépendamment de la direction de la pesanteur. À défaut d'avoir un appareil photo pour photographier ces observations, Savart a alors imaginé une méthode très astucieuse pour extraire, avec une remarquable précision, une image complète de ce qu'il n'observait jusque-là, qu'avec ses yeux nus. Il a utilisé à cet effet, une ceinture noire, alternée par d'étroites fentes blanches, qu'il a déplacé dans la direction inverse du jet. Ce qui lui a permis une observation stroboscopique du jet. Pour confirmer que le jet se décompose en gouttes et donc devient discontinu, Savart a déplacé rapidement un objet fin à travers le jet, et a trouvé qu'il est resté sec la plupart des endroit. L'observation de Savart sur la rupture des jets est présentée sur la figure 1.5, **(a)**.

Un peu plus tard, Plateau [41] (1843) a développé sa propre technique expérimentale pour étudier la rupture de ligament liquide. Il met alors en suspension un ligament liquide dans un autre liquide de même densité, éliminant ainsi les effets de la gravité. À cette époque, les recherches de Plateau étaient axées sur la prédiction de la stabilité du pont liquide. Ce n'est qu'en 1843 que Plateau [42] (1849) découvrit le mécanisme responsable de l'instabilité linéaire conduisant à la rupture du ligament (figure 1.5, **(b)**). Considérant un ligament liquide, cylindrique et de taille infinie, Plateau montre que ce parfait cylindre liquide est stationnaire, mais instable : car une perturbation de sa surface, d'une longueur d'onde supérieure à son périmètre conduit inévitablement à sa fragmentation en gouttelettes. Cette instabilité est celle qu'on voit lorsqu'on laisse échapper du robinet un mince filet d'eau (voir figure 1.3, **(f)**). Plateau montre alors qu'au dessus de cette longueur d'onde critique, l'interface du ligament liquide subit une perturbation sinusoïdale pour réduire son énergie de surface, conduisant alors à sa fragmentation en gouttelettes (figure 1.5, **(b)**).

Suite aux travaux de Plateau, Rayleigh [48](1879) ajoute une description analytique du processus de la rupture. Ces calculs de stabilité linéaire sur le cylindre liquide

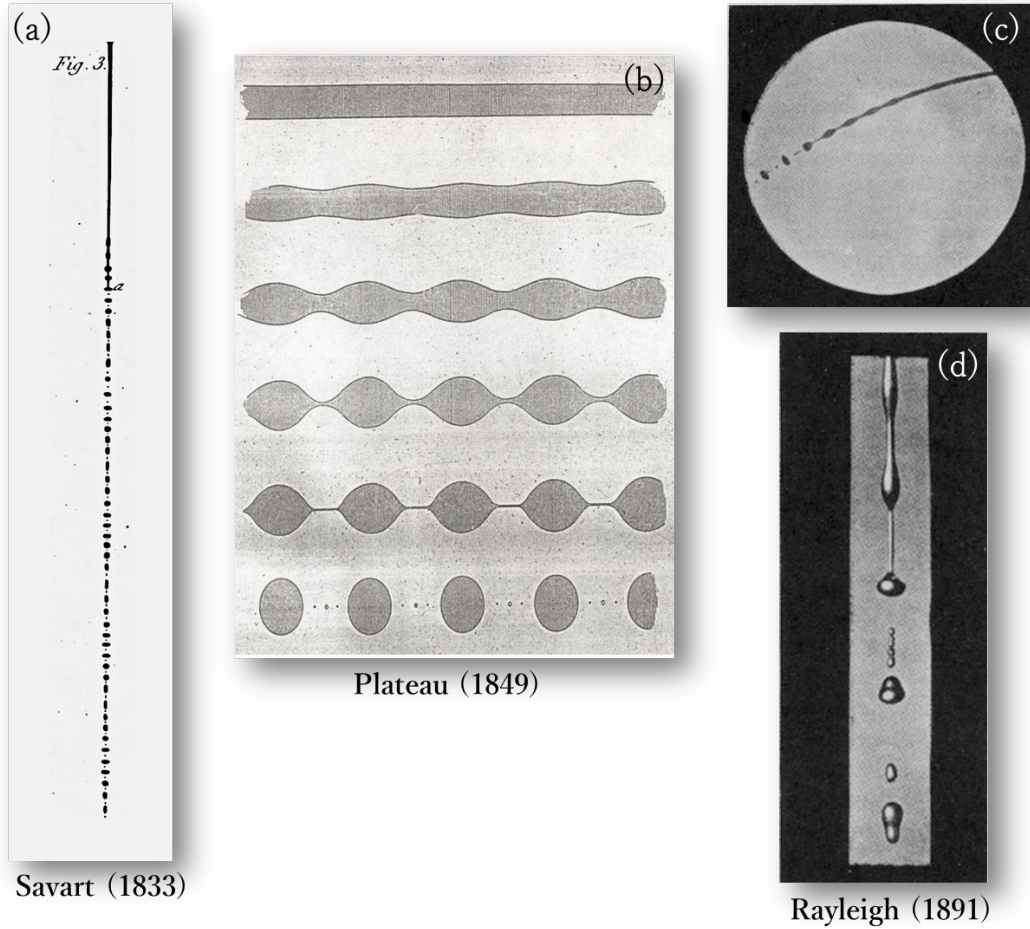


FIGURE 1.5 – Instabilité de Rayleigh-Plateau. (a) : observations de la fragmentation d'un jet liquide très fin [54]. (b) : déstabilisation du cylindre liquide lorsqu'il est perturbé par une longueur d'onde plus grande que son périmètre [42] (1849). (c) & (d) : expériences de Rayleigh [49] (1891), sur la rupture du jet liquide.

permettent de déterminer le taux de croissance initiale de l'instabilité, mais malheureusement pas les détails (non linéaires) de la rupture, comme l'apparition des gouttes satellites observées par Plateau. Ce processus de la rupture de ligament cylindrique portera plus tard le nom d'instabilité de Rayleigh-Plateau (voir figure 1.5, (c) & (d)).

L'instabilité de Rayleigh-Plateau constituera alors, un archétype pour comprendre le phénomène de segmentation pour le cas d'un cylindre liquide infiniment long. Malheureusement elle est insuffisante pour décrire toutes les segmentations, car les ligaments liquides sont généralement de longueurs finies. Il nous faut donc trouver un autre archétype pour décrire complètement la segmentation capillaire.

### 1.2.3 Cas des ligaments finis

Quelques années plus tard, Rayleigh [50, 51], puis Culick [12] (1960), décrivent le cas de la dynamique de rupture des ligaments finis ou semi-finis. Ils observent alors que le ligament se rétracte par le bout et collecte de la masse liquide pour former un bourrelet qui grossit au cours du temps. Une quantité naturellement observable est la vitesse à laquelle ce bourrelet se rétracte. Cette vitesse est évaluée par Taylor (1959) et Culick (1960) pour le cas d'une nappe liquide 2D, puis par Keller [24] (1983) et Keller et al. [25] (1983) pour le ligament liquide. Ils montrent alors que la dynamique de la rétraction d'un ligament homogène initialement au repos, après une phase de transition, atteint une vitesse constante nommée vitesse de Taylor-Culick :

$$V(t) = \sqrt{\sigma/\rho R}$$

avec  $R$  le rayon du ligament,  $\sigma$  sa tension de surface et  $\rho$  sa densité. Cette vitesse se déduit de l'équilibre des forces inertielles de la masse liquide entrant dans le bourrelet et des forces capillaires. Une conséquence directe de cette vitesse constante est que la masse par unité de longueur  $M(t)$  dans le bourrelet croît linéairement avec le temps pendant cette phase où la vitesse de Taylor-Culick est valable :

$$dM(t)/dt = \sqrt{\sigma\rho R}$$

.

Considérons un des ligaments de la figure 1.6, **(b)**, de demi-longueur  $L$  finie. Loin du bout, le cylindre liquide est localement stationnaire. Mais au bout du ligament, l'augmentation de pression due à la courbure de l'interface, ne peut être équilibrée par la pression inertielle du liquide : ce qui conduit le ligament à se rétracter. Des explications sur la dynamique du bourrelet seront proposées par Stone et al. [62] (1986), puis par Stone & Leal (1989), sous le nom du phénomène de "end-pinching". Si le ligament liquide n'est pas trop perturbé sur toute sa longueur, le processus de rétraction capillaire dominera l'instabilité de Rayleigh-Plateau le long du ligament, le conduisant à sa segmentation et à la création d'une goutte. Ce qui indique que, dans le cas de longueur finie, c'est sur le bout du ligament qu'il faut se focaliser pour comprendre sa segmentation.

#### Anatomie du bourrelet

Parlons maintenant de l'anatomie du bourrelet. Dans les temps courts, on observe une augmentation du diamètre de la région de connexion entre le bourrelet et le reste du

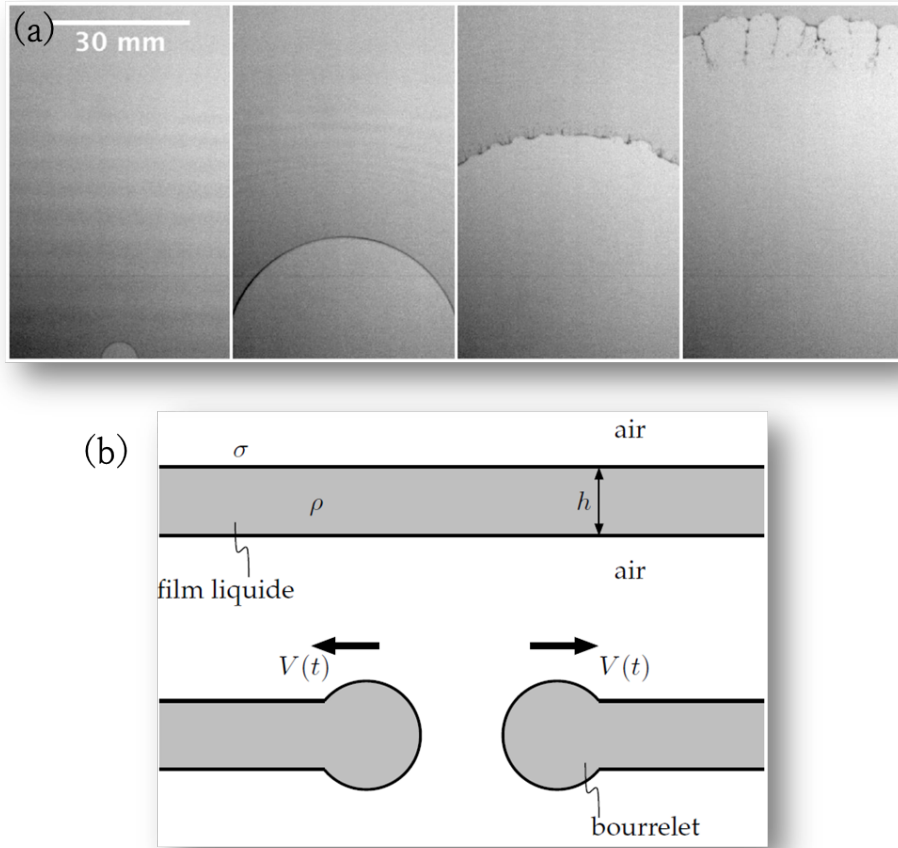


FIGURE 1.6 – **(a)** : expérience de nucléation de trou dans un film de savon [29]. **(b)** : description schématique de la rétractation du bourrelet, coupe transversale de la nappe liquide (le schéma est de A. Antkowiak).

cylindre liquide (voir figure 1.6, **(b)**). Cela veut dire que dans cette région de connexion, la courbure de l'interface a deux composantes : une composante à l'intérieur du cylindre qui est son rayon et une seconde composante qui est le rayon de courbure tourné vers l'extérieur que l'on va appeler courbure extérieure (figure 1.7, **(a)**). La tension associée à cette courbure extérieure a un effet inverse, elle réduit la pression intérieure dans la région de connexion : le centre de courbure est à l'extérieur du ligament, la tension associée va donc pousser l'interface vers l'intérieur du ligament (figure 1.7, **(b)**). Cette surpression extérieure sera compensée par la baisse de la pression au niveau du cou ("Neck" sur la figure). Ainsi la pression juste à l'entrée du bourrelet devient donc inférieure à celle du cylindre liquide dont le seul rayon de courbure reste  $R$ . Ce qui conduit à un gradient de pression et donc un flux de particules fluides du cylindre liquide vers le bourrelet. Ce retour de fluide crée alors un cou entre le bourrelet et le

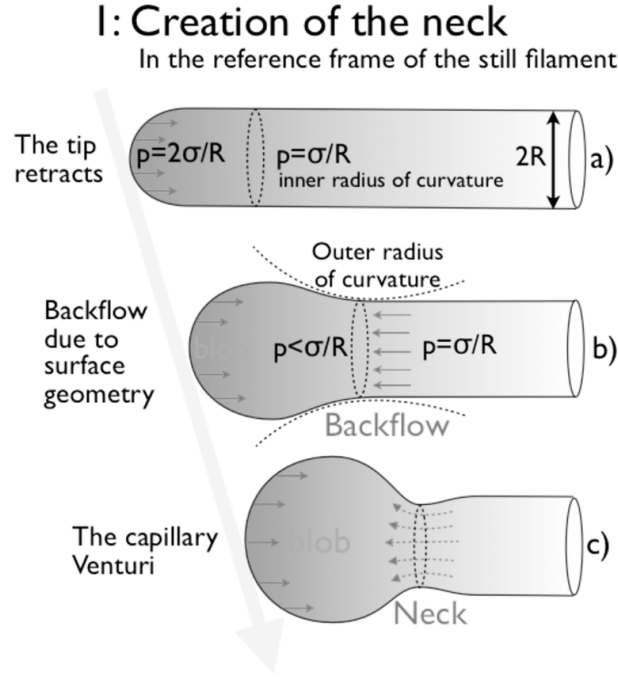


FIGURE 1.7 – Description schématique de la formation du bourrelet

reste du cylindre liquide (figure 1.7, (b)). Ce mécanisme est décrit par Stone & Leal [62] (1989) pour des ligaments visqueux. Une fois le cou créé, la nouvelle courbure associée sera responsable du saut de pression à l'interface. Ce cou est alors soumis à l'instabilité de Rayleigh-Plateau, son rayon décroît de façon drastique et tend vers la segmentation.

Ce processus, appelé phénomène du *end-pinching*, nous permet donc de décrire la segmentation d'un ligament de longueur finie, soumis à sa tension de surface. Il est donc important de retenir ces deux processus : d'une part l'instabilité de Rayleigh-Plateau, qui régie la segmentation d'un ligament infini, et d'autre part, le phénomène du *end-pinching* pour le cas du ligament fini.

Une autre chose importante à noter dans les travaux de Stone sur la rétraction capillaire est que la segmentation du ligament est étroitement liée au rapport de viscosités,  $\lambda = \hat{\mu}/\mu$  entre le liquide étudié et celle du fluide extérieur qui l'entoure, et à l'élongation (le rapport d'aspect) du ligament. Stone a particulièrement observé que lorsque ce rapport  $\lambda > O(1)$ , les ligaments nécessitent une plus grande élongation pour se segmenter.

Des observations similaires ont été produites (numériquement), par Schulkes [58] (1995), figure 1.8, (b), puis par Notz et Basaran [40] (2004), figure 1.8, (c). Considérant la viscosité du fluide extérieur constante, la segmentation du ligament dépend de

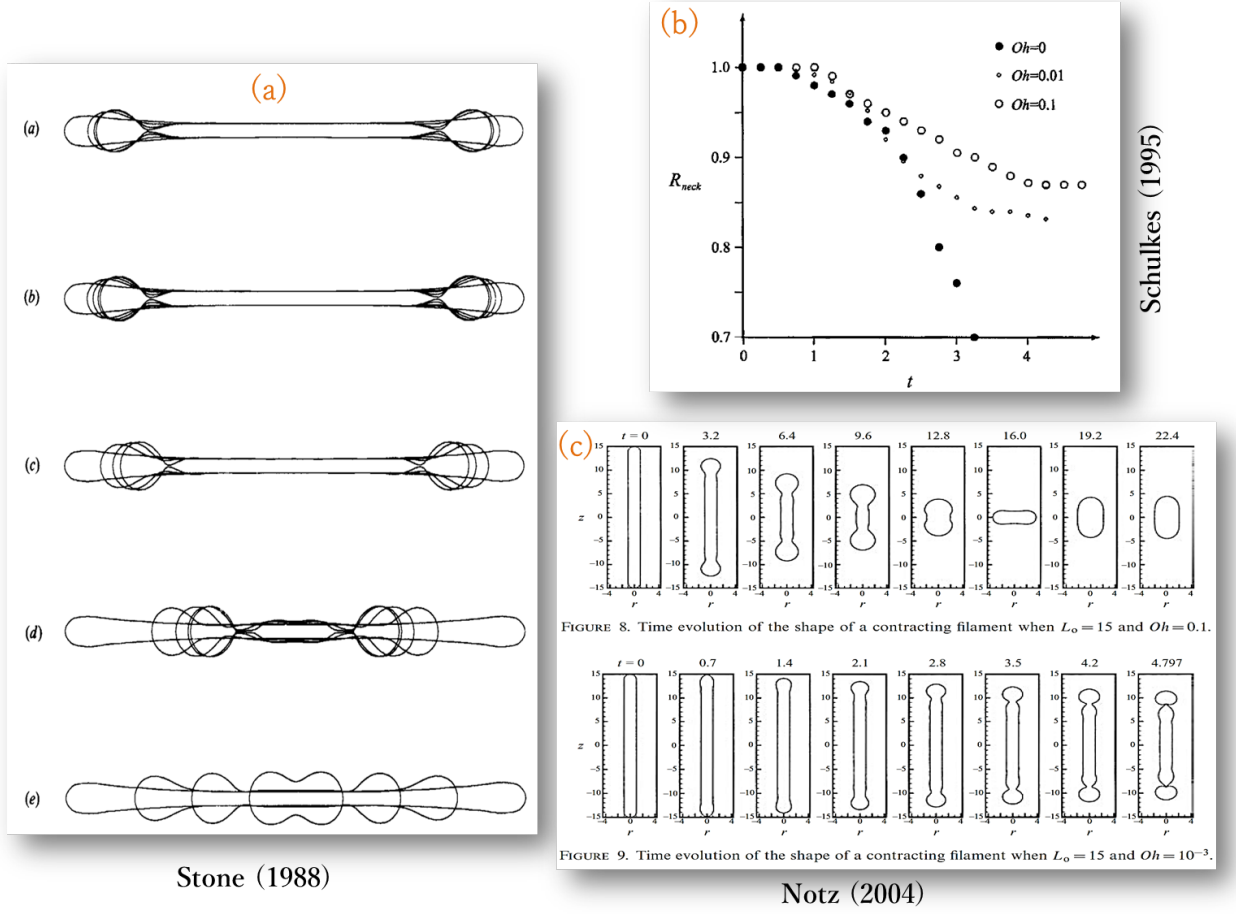


FIGURE 1.8 – Rétractation capillaire. (a) : les expériences de Stone [62] sur les ligaments visqueux. (b) : simulations numériques de Schulkes [58] sur la rétractation capillaire, évolution temporelle du rayon du cou du ligament pour différents nombres d'Ohnesorge. (c) : simulations numériques sur la rétractation capillaire de Notz et al. [40] .

deux paramètres : le rapport d'aspect  $L/R$  et d'un autre paramètre nommé nombre d'Ohnesorge :

$$Oh = \frac{\mu}{\sqrt{\rho R \sigma}}.$$

L'évolution d'un ligament de rapport d'aspect  $Lo = L/2R = 15$  pour  $Oh = 0.1$  et  $Oh = 0.001$ , observée par Notz et al., est présentée sur la figure 1.8, (b). Notz et al. montrent que le ligament se segmente pour  $Oh = 0.001$  mais se rétracte en une seule goutte pour  $Oh = 0.1$ . Ce résultat est bien confirmé par les résultats de Schulkes, sur la figure 1.8, (b) : évolution du rayon du cou du ligament en fonction du temps pour différents  $Oh$ .

Récemment, Castrejón-Pita et al. [9] (2012), apportent leurs contributions sur la segmentation capillaire. Ces contributions sont particulièrement intéressantes car elles résument la plupart des travaux des autres recherches sur le sujet. Dans leur article *Breakup of liquid filament* [9], Castrejón-Pita et al. ont effectué des études expérimentales sur la fragmentation de ligaments liquides. Le principal nouveau résultat dans leur article est de dresser la frontière entre : les cas de fragmentation du ligament en une ou plusieurs gouttes et le cas où le ligament se rétracte en une seule goutte sans segmentation. Ils comparent ensuite leurs études expérimentales aux simulations numériques de Notz [40] et Schulkes [58], lorsque  $Oh < 0.05$ . Ces comparaisons montrent de très bons accords pour la frontière (voir figure 1.9, (b)).

Pour vérifier numériquement les résultats de Castrejón-Pita et al. pour  $Oh > 0.1$ , il faudra attendre les travaux de Driessen et al. [14] (2013), qui prédisent bien la frontière obtenue par Castrejón-Pita (figure 1.9, (d)).

## 1.3 Dynamique de la segmentation : solutions auto-semblables

Maintenant que nous connaissons les mécanismes responsables de la segmentation, peut-on la décrire proprement ?

### 1.3.1 Cas non visqueux

En 1983, Keller & Miksis [25] décrivent une solution auto-semblable lors de la rétractation d'une nappe liquide non visqueuse, juste après segmentation (figure 1.10, (b)). Ils montrent que la pointe de la nappe liquide (après segmentation), dans le cas non visqueux, se rétracte comme une onde capillaire et de façon auto-semblable. En effet, l'analyse dimensionnelle confirme qu'il n'existe qu'une seule échelle caractéristique de longueur :

$$L = (\sigma t^2 / \rho)^{1/3},$$

pouvant être basée sur le temps, avec  $\sigma$  la tension de surface du ligament,  $\rho$  sa densité et  $t$  le temps. La forme exacte de l'onde capillaire de rétractation est une fonction de l'angle d'ouverture de la pointe de la nappe liquide.

Récemment, Sierou & Lister [60] (2004) élargissent cette étude au cas de la rétractation d'un cône liquide axisymétrique et non visqueux. Ces études sur le cône liquide sont motivées par le fait que, juste après la segmentation capillaire, avant la formation du bourrelet, la pointe du ligament prend la forme du cône liquide (voir



[25, 15, 65], figure 1.10, (a)). La différence principale avec le cas 2D est que le cas axisymétrique est soumis à l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Ils montrent alors que dans le cas axisymétrique, cette auto-similarité est conservée. La conséquence directe de cette auto-similarité est qu'un cône liquide est théoriquement incapable de se segmenter : seul le cône d'angle nul serait capable de se segmenter. Ceci se déduit de l'analyse dimensionnelle du problème : le taux de croissance du cou du cône liquide est le même que celui de l'onde capillaire le long du cône liquide dont la section augmente. En effet, si  $(z, r)$  représentent les coordonnées cylindriques du cône liquide, alors les variables d'auto-similarité  $(\bar{z}, \bar{r})$  s'écrivent :

$$\bar{z} = \left( \frac{\rho}{\sigma \tau^2} \right)^{1/3} z, \quad \bar{r} = \left( \frac{\rho}{\sigma \tau^2} \right)^{1/3} r, \quad ,$$

avec  $\tau = t - t_s$ ,  $t_s$  le temps de la segmentation. La variable  $\bar{r}$  est donc une fonction croissante de  $r$  (la seule possibilité pour que  $\bar{r} = 0$  est que  $r = 0$ , c'est à dire un cône d'angle nul), la segmentation est donc impossible dans le cas du cône liquide.

### 1.3.2 Cas d'un ligament visqueux

La situation est bien différente dans le cas de la rétraction d'un ligament cylindrique, puisque sa section est une constante, il n'y a donc pas d'augmentation de la section pour compenser la capillarité. Pour le cas visqueux, la dynamique du cou avant et après la segmentation du ligament seront étudiés par Eggers [15] (1993), puis par Eggers & Dupont [16] (1994). Les solutions auto-semblables observées dans les cas non visqueux (rétraction du cône liquide, axisymétrique et non visqueux [60]) sont insuffisantes pour décrire le cas du ligament visqueux. Deux nouveaux paramètres sont introduits : la longueur caractéristique dépendant de la viscosité  $l_\nu = (\rho \nu^2 / \sigma)$ , et un temps caractéristique  $t_\nu = (\rho^2 \nu^3 / \sigma^2)$ , traduisent l'équilibre des forces visqueuses et capillaires lors de la segmentation. En considérant une durée  $\Delta t = (t_s - t) / t_\nu$  autour du temps de la segmentation  $t_s$ , et la distance  $z' = (z - z_s) / l_\nu$  avec  $z_s$  la position de la segmentation, Eggers montre qu'on peut redimensionner les paramètres

$$h(z, t) = l_\nu t'^{\alpha_1} \phi(z' / t'^\beta), \quad v(z, t) = (l_\nu / t_\nu u) t'^{\alpha_2} \psi(z' / t'^\beta),$$

avec les  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$  des coefficients constants,  $h$  le rayon du cou et  $v$  la vitesse de rétrécissement du cou avant la segmentation ou la vitesse du bourrelet après segmentation. Ainsi, pendant l'intervalle  $\Delta t$  les quantités  $h$ ,  $z'$  et  $v$  sont auto-semblables (figure 1.10, (c)).

## 1.4 Organisation du manuscrit

Le deuxième chapitre est consacré aux méthodes numériques de résolution des équations de Navier-Stokes avec le logiciel *Gerris flow solver*, qui sera dans ce document le principal outil de simulations des écoulements diphasiques avec tension de surface. Une description brève des méthodes numériques pour la résolution des équations de Navier-Stokes sera présentée. L'advection et la reconstruction de l'interface entre les deux fluides sont obtenues par la méthode Volume-of-Fluid et le maillage utilisé est adaptatif.

Le deuxième chapitre traite de la segmentation capillaire. Les recherches présentées sont à la fois numériques et expérimentales. Nous décrirons un phénomène inattendu, l'"évitement de l'étranglement". Nous expliquerons la structure de la frontière obtenue par Castrejón-Pita et al. [9], grâce à ce phénomène. Enfin nous présenterons le cas de la rétractation du cône liquide et nous montrerons qu'elle est auto-semblable, comme c'est le cas pour les travaux de Keller et al. [25], ou Sierou et al. [60].

Les chapitres 3 et 4 traiteront de l'instabilité du pont capillaire soumis à un débit : le Venturi capillaire. Ces études ont été motivées par la compréhension du phénomène d'évitement du chapitre 2. Nous présenteront deux cas : le cas statique (étude classique de la stabilité du pont capillaire), et le cas dynamique (le pont capillaire est soumis à un débit). Dans le cas statique, nous validerons les résultats de nos simulations par comparaison aux résultats de la littérature. Dans le cas dynamique, nous dresserons le diagramme de bifurcation du pont capillaire, à partir d'un code Matlab basé sur les équations 1D de Navier-Stokes [16] que nous allons comparer avec nos simulations (DNS : "Direct Numerical Simulations") des équations complètes de Navier-Stokes. Nous décrirons également des études expérimentales préliminaires sur le pont capillaire.

Enfin nous clôturons ce manuscrit avec une conclusion générale sur les différents travaux effectués et nous présenterons quelques perspectives.

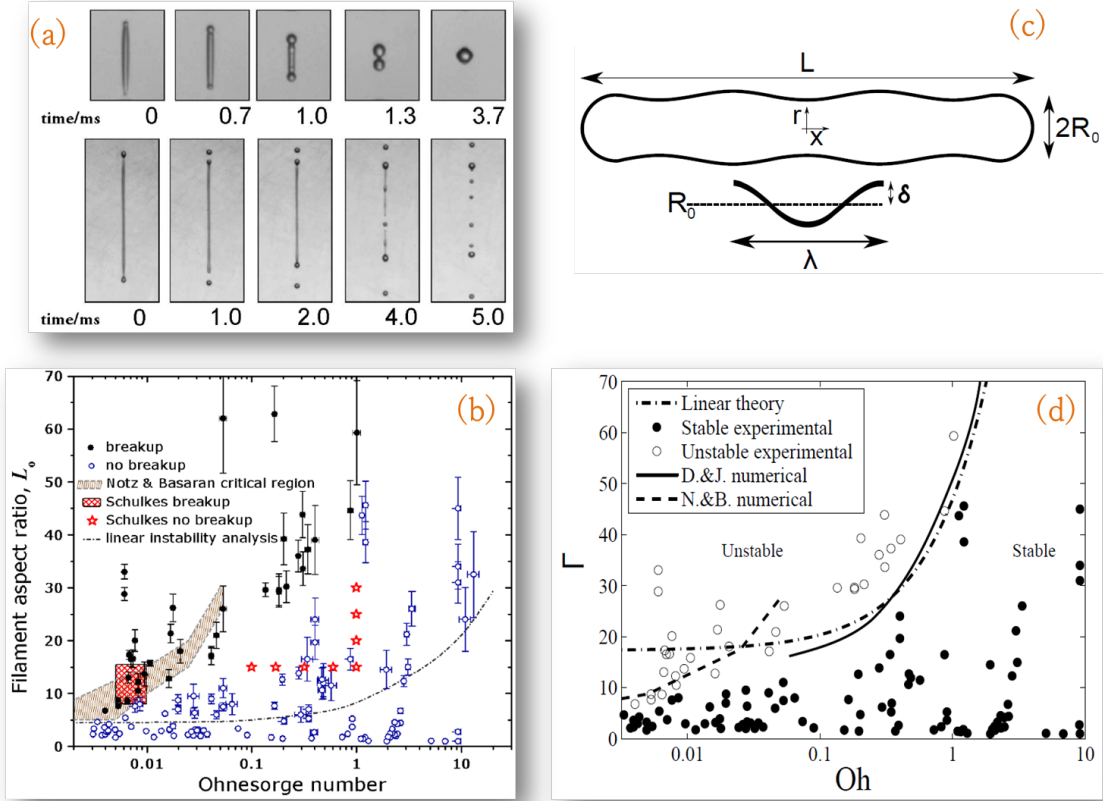


FIGURE 1.9 – Détermination de la frontière entre : "le ligament se segmente" pour faire des gouttes et "le ligament ne se segmente pas". (a) : les expériences de Castrejón-Pita [9] pour deux ligaments de nombre d'Ohnesorge et de rapports d'aspects différents. (b) : les résultats de Castrejón-Pita [9] sur le diagramme comportemental des ligaments. (c) : schéma de la forme du ligament perturbé par une onde d'amplitude  $\delta$  [14]. (d) : la frontière analytique obtenue par Driessen [14], comparaison avec les résultats de Castrejón-Pita [9].

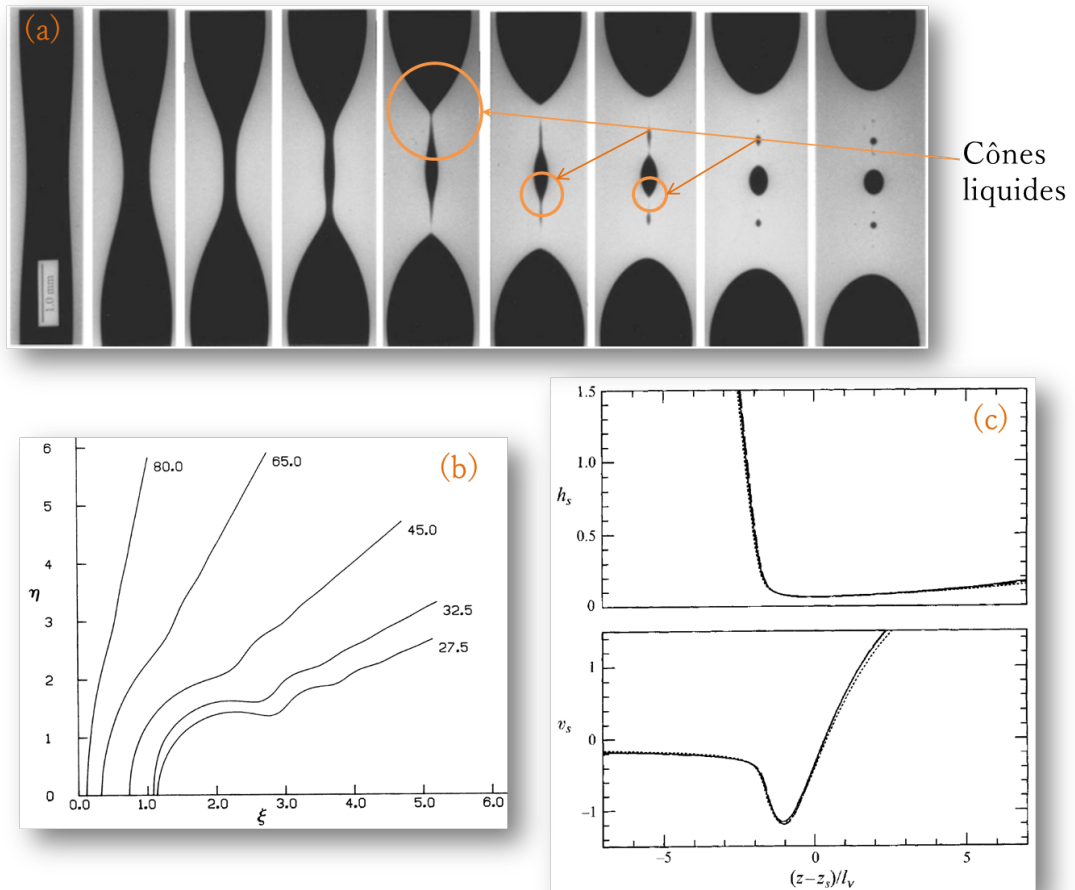


FIGURE 1.10 – (a) : formation de cône liquide après segmentation de ligament visqueux [65]. (b) : les solutions auto-semblables du cône liquide non visqueux. (c) : les solutions auto-semblables du ligament visqueux juste avant et après sa segmentation [15].



- [1] ANTKOWIAK, A., BREMOND, N., LE DIZES, S., AND VILLERMAUX, E. Short-term dynamics of a density interface following an impact. *Journal of Fluid Mechanics* 577 (2007), 241–250.
- [2] AULISA, E., MANSERVISI, S., SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Interface reconstruction with least-squares fit and split advection in three-dimensional cartesian geometry. *Journal of Computational Physics* 225, 2 (2007), 2301–2319.
- [3] BAYVEL, L., AND ORZECOWSKI, Z. Liquid atomization, combustion : An international series, 1993.
- [4] BELL, J. B., AND MARCUS, D. L. A second-order projection method for variable-density flows. *Journal of Computational Physics* 101, 2 (1992), 334–348.
- [5] BLANCHARD, D. C., AND HEINRICH, B. C. *From raindrops to volcanoes*. Doubleday Garden City, NY, 1967.
- [6] BRACKBILL, J., KOTHE, D. B., AND ZEMACH, C. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of computational physics* 100, 2 (1992), 335–354.
- [7] BREMOND, N. *Stabilité et atomisation des nappes liquides*. PhD thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I, 2003.
- [8] BRENNER, M. P., AND GUEYFFIER, D. On the bursting of viscous films. *Physics of Fluids* 11 (1999), 737–739.
- [9] CASTREJÓN-PITA, A. A., CASTREJON-PITA, J., AND HUTCHINGS, I. Breakup of liquid filaments. *Physical review letters* 108, 7 (2012), 074506.
- [10] CHORIN, A. J. On the convergence of discrete approximations to the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation* 23, 106 (1969), 341–353.

- [11] CONRATH, M., CANFIELD, P., BRONOWICKI, P., DREYER, M. E., WEISLOGEL, M. M., AND GRAH, A. Capillary channel flow experiments aboard the international space station. *Physical Review E* 88, 6 (2013), 063009.
- [12] CULICK, F. Comments on a ruptured soap film. *Journal of applied physics* 31, 6 (1960), 1128–1129.
- [13] DE LA GRANGE, J. L. *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés : avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques*. Bachelier, 1826.
- [14] DRIESSEN, T., JEURISSEN, R., WIJSHOFF, H., TOSCHI, F., AND LOHSE, D. Stability of viscous long liquid filaments. *Physics of Fluids (1994-present)* 25, 6 (2013), 062109.
- [15] EGGERS, J. Universal pinching of 3d axisymmetric free-surface flow. *Physical Review Letters* 71, 21 (1993), 3458.
- [16] EGGERS, J., AND DUPONT, T. F. Drop formation in a one-dimensional approximation of the navier–stokes equation. *Journal of fluid mechanics* 262 (1994), 205–221.
- [17] FRANCOIS, M. M., CUMMINS, S. J., DENDY, E. D., KOTHE, D. B., SICILIAN, J. M., AND WILLIAMS, M. W. A balanced-force algorithm for continuous and sharp interfacial surface tension models within a volume tracking framework. *Journal of Computational Physics* 213, 1 (2006), 141–173.
- [18] GHABACHE, E., ANTKOWIAK, A., JOSSE RAND, C., AND SÉON, T. On the physics of fizziness : How bubble bursting controls droplets ejection. *Physics of Fluids (1994-present)* 26, 12 (2014), 121701.
- [19] GUEYFFIER, D., LI, J., NADIM, A., SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *Journal of Computational Physics* 152, 2 (1999), 423–456.
- [20] HARVIE, D. J., DAVIDSON, M., AND RUDMAN, M. An analysis of parasitic current generation in volume of fluid simulations. *Applied mathematical modelling* 30, 10 (2006), 1056–1066.
- [21] HOYT, J. W., AND TAYLOR, J. Waves on water jets. *Journal of Fluid Mechanics* 83, 01 (1977), 119–127.
- [22] JAMES, A., VUKASINOVIC, B., SMITH, M. K., AND GLEZER, A. Vibration-induced drop atomization and bursting. *Journal of Fluid Mechanics* 476 (2003), 1–28.

- [23] KELLER, H. Lectures on numerical methods in bifurcation problems. *Applied Mathematics* 217 (1987), 50.
- [24] KELLER, J. B. Breaking of liquid films and threads. *Physics of Fluids (1958-1988)* 26, 12 (1983), 3451–3453.
- [25] KELLER, J. B., AND MIKSI, M. J. Surface tension driven flows. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 43, 2 (1983), 268–277.
- [26] KUBITSCHKE, J., AND WEIDMAN, P. Helical instability of a rotating liquid jet. *Physics of Fluids* 20, 9 (2008), 91104.
- [27] LAFAURIE, B., NARDONE, C., SCARDOVELLI, R., ZALESKI, S., AND ZANETTI, G. Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with surfer. *Journal of Computational Physics* 113, 1 (1994), 134–147.
- [28] LAPLACE, P. S. *Traité de mécanique céleste/par PS Laplace...; tome premier [-quatrième]*, vol. 4. de l’Imprimerie de Crapelet, 1805.
- [29] LHUISSIER, H., AND VILLERMAUX, E. Soap films burst like flapping flags. *Physical review letters* 103, 5 (2009), 054501.
- [30] LI, J. Calcul d’interface affine par morceaux. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, astronomie* 320, 8 (1995), 391–396.
- [31] LI, J. *Résolution numérique de l’équation de Navier-Stokes avec reconnection d’interfaces. Méthode de suivi de volume et application à l’atomisation.* PhD thesis, 1996.
- [32] LOWRY, B. J., AND STEEN, P. H. Stability of slender liquid bridges subjected to axial flows. *Journal of Fluid Mechanics* 330 (1997), 189–213.
- [33] MADDOKS, J. H. Stability and folds. *Archive for Rational mechanics and Analysis* 99, 4 (1987), 301–328.
- [34] MARMOTTANT, P. *Atomisation d’un liquide par un courant gazeux.* PhD thesis, Grenoble, INPG, 2001.
- [35] MARTÍNEZ, I., AND PERALES, J. Liquid bridge stability data. *Journal of crystal growth* 78, 2 (1986), 369–378.
- [36] MESEGUER, J. The influence of axial microgravity on the breakage of axisymmetric slender liquid bridges. *Journal of crystal growth* 62, 3 (1983), 577–586.
- [37] M’KENDRICK, J. G. Helmholtz in berlin—physical researches continued [1].
- [38] MYSHKIS, A., BABSKII, V., KOPACHEVSKII, N., SLOBOZHANIN, L., TYUPTSOV, A., AND WADHWA, R. Low-gravity fluid mechanics. *Translated from the*



- Russian by Wadhwa, RS, XIX, 583 pp. 218 figs.. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1 (1987).*
- [39] NIKITOPOULOS, D. E., AND KELLY, A. J. Formation of a net-negative charged liquid spray. *Physics of Fluids (1994-present)* 12, 9 (2000), S7–S7.
  - [40] NOTZ, P. K., AND BASARAN, O. A. Dynamics and breakup of a contracting liquid filament. *Journal of Fluid Mechanics* 512 (2004), 223–256.
  - [41] PLATEAU, J. *Acad. Sci.*, vol. XVI. Bruxelles Mém., 1843.
  - [42] PLATEAU, J. *Acad. Sci.*, vol. XXIII. Bruxelles Mém., 1849.
  - [43] PLATEAU, J. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, vol. 2. Gauthier-Villars, 1873.
  - [44] POPINET, S. Gerris : a tree-based adaptive solver for the incompressible euler equations in complex geometries. *Journal of Computational Physics* 190, 2 (2003), 572–600.
  - [45] POPINET, S. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *Journal of Computational Physics* 228, 16 (2009), 5838–5866.
  - [46] POPINET, S., AND ZALESKI, S. A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 30, 6 (1999), 775–793.
  - [47] QUERE, D., DE GENNES, P., BROCHARD-WYART, F., AND REISINGER, A. Capillarity and wetting phenomena : Drops, bubbles, pearls, waves, 2004.
  - [48] RAYLEIGH, L. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proceedings of the London Mathematical Society* 1, 1 (1879), 57–72.
  - [49] RAYLEIGH, L. Some applications of photography. *Nature* 44, 1133 (1891), 249–254.
  - [50] RAYLEIGH, L. *Sci. Papers*, vol. I. 1899.
  - [51] RAYLEIGH, L. *Sci. Papers*, vol. III. 1902.
  - [52] RENARDY, Y., AND RENARDY, M. Prost : a parabolic reconstruction of surface tension for the volume-of-fluid method. *Journal of Computational Physics* 183, 2 (2002), 400–421.
  - [53] RIDER, W. J., AND KOTHE, D. B. Reconstructing volume tracking. *Journal of computational physics* 141, 2 (1998), 112–152.
  - [54] SAVART, F. Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Ann. Chim. Phys* 53, 337 (1833), 1833.

- [55] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annual review of fluid mechanics* 31, 1 (1999), 567–603.
- [56] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Analytical relations connecting linear interfaces and volume fractions in rectangular grids. *Journal of Computational Physics* 164, 1 (2000), 228–237.
- [57] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Interface reconstruction with least-square fit and split eulerian–lagrangian advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 41, 3 (2003), 251–274.
- [58] SCHULKES, R. The contraction of liquid filaments. *Journal of Fluid Mechanics* 309 (1996), 277–300.
- [59] SÉBILLEAU, J., LIMAT, L., AND EGGERS, J. Flow separation from a stationary meniscus. *Journal of Fluid Mechanics* 633 (2009), 137–145.
- [60] SIEROU, A., AND LISTER, J. R. Self-similar recoil of inviscid drops. *Physics of Fluids (1994-present)* 16, 5 (2004), 1379–1394.
- [61] SLOBOZHANIN, L. A., AND PERALES, J. M. Stability of liquid bridges between equal disks in an axial gravity field. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics (1989-1993)* 5, 6 (1993), 1305–1314.
- [62] STONE, H. A., AND LEAL, L. Relaxation and breakup of an initially extended drop in an otherwise quiescent fluid. *Journal of Fluid Mechanics* 198 (1989), 399–427.
- [63] SUSSMAN, M., ALMGREN, A. S., BELL, J. B., COLELLA, P., HOWELL, L. H., AND WELCOME, M. L. An adaptive level set approach for incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics* 148, 1 (1999), 81–124.
- [64] THOMSON, W. Hydrokinetic solutions and observations.(lord kelvin). In *Proc. Royal Soc* (1871), vol. 7, p. 63.
- [65] TIAHJADI, M., STONE, H., AND OTTINO, J. Satellite and subsatellite formation in capillary breakup. *Journal of Fluid Mechanics* 243 (1992), 297–317.
- [66] WEBER, C. Zum zerfall eines flüssigkeitsstrahles. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 11, 2 (1931), 136–154.
- [67] ZEFF, B. W., KLEBER, B., FINEBERG, J., AND LATHROP, D. P. Singularity dynamics in curvature collapse and jet eruption on a fluid surface. *Nature* 403, 6768 (2000), 401–404.



## CHAPITRE 2

# LE LOGICIEL GERRIS FLOW SOLVER

### Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>39</b>
<b>2.2</b>	<b>Maillage</b>	<b>40</b>
<b>2.3</b>	<b>Résolution numérique des équations de Navier-Stokes</b>	<b>40</b>
<b>2.4</b>	<b>Schéma d'advection Volume Of Fluid (VOF)</b>	<b>44</b>
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>48</b>

## 2.1 Introduction

Toutes les simulations numériques dans ce document sont faites grâce au logiciel nommé *Gerris Flow Solver*. Dans ce chapitre je présente brièvement les méthodes numériques du logiciel pour la simulation des écoulements. *Gerris* est un logiciel libre ([gfs.sourceforge.net/](http://gfs.sourceforge.net/)) qui implémente des méthodes de résolution numérique des équations de Navier-Stokes (monophasique et diphasique) en utilisant un maillage adaptatif et une méthode de suivi en volume avec construction d'interfaces par morceaux (VOF : Volume-of-Fluid). Il a été développé par Stéphane Popinet [45], et financé par la National Institut of Water and Atmospheric research (NIWA) et la Royal Society of New Zealand. *Gerris* est écrit en langage C et utilise un style de programmation orienté objet. Il permet de simuler des écoulements stationnaires, incompressibles, avec ou sans la tension de surface et fonctionne grâce à un fichier de paramètre contenant les conditions physiques de l'écoulement.

## 2.2 Maillage

Le domaine de calcul est discrétisé en carrés (en 2D) ou cubes (en 3D) de volumes finis, organisés hiérarchiquement suivant une structure de type arbre appelée "quadtree" en 2D (ou "octree" en 3D). Chaque volume fini appelé cellule peut être au plus subdivisé en 4 sous cellules selon le niveau de raffinement souhaité et ainsi de suite (voir figure 2.1). Le maillage avec Gerris peut être uniforme ou adaptatif, selon ce que l'on veut capturer dans l'écoulement : la pression, la vorticité, l'interface, ou encore le champs de vitesse.

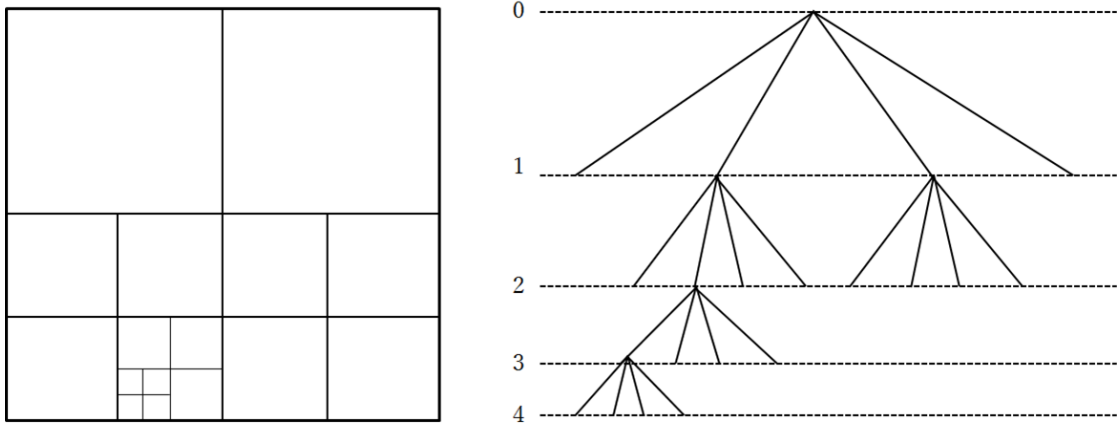


FIGURE 2.1 – Représentation schématique de discrétisation en "quadtree" (à gauche) et sa correspondante en structure d'arbre (à droite).

## 2.3 Résolution numérique des équations de Navier-Stokes

Il sera question ici d'écoulement diphasique, incompressible, avec interface. Les équations de Navier-Stokes décrivant ces types d'écoulement s'écrivent :

$$\rho(\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) + \sigma \kappa \delta_s \mathbf{n} + \mathbf{F}_{ext}, \quad (2.1a)$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2.1c)$$

où  $\mathbf{U} = (u, v, w)$  représente le champ de vecteurs vitesse,  $\rho \equiv \rho(x, t)$  est la densité du fluide,  $\mu \equiv \mu(x, t)$  la viscosité dynamique,  $\mathbf{F}_{ext}$  l'ensemble des forces extérieures

appliquées au système,  $\delta_s$  la mesure de Dirac, qui exprime le fait que le terme de tension de surface est axé sur l'interface, qui dépend de la courbure  $\kappa$  et de la normale  $\mathbf{n}$  à l'interface, et enfin  $\mathbf{D}$  est le tenseur des déformations :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right).$$

À ces équations, doit s'ajouter la condition sur l'interface (dans les cas diphasiques) qui suit l'écoulement avec une vitesse normale :

$$V_S = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}.$$

Dans le cas d'écoulements diphasiques, il faut aussi prendre en compte la différence de densités et de viscosités des deux fluides. La notion de fraction de volume est donc introduite. Considérant  $c(x, t)$  la fraction de volume de fluide de la phase 1, la densité et viscosité du système est alors défini par :

$$\rho(c) = c\rho_1 + (1 - c)\rho_2, \quad (2.2a)$$

$$\mu(c) = c\mu_1 + (1 - c)\mu_2, \quad (2.2b)$$

avec  $\rho_1, \mu_1$  (respectivement  $\rho_2, \mu_2$ ), la densité et la viscosité des fluides dans la phase 1 (respectivement dans la phase 2). L'équation d'advection de la fraction de volume s'écrit alors :

$$\partial_t c + \nabla \cdot (c\mathbf{U}) = 0.$$

Avant de commencer par présenter les schémas numériques, rappelons les différentes étapes pour résoudre les équations de Navier-Stokes pour le cas mono ou diphasique :

- premièrement, trouver la méthode d'intégration en temps
- décider du schéma à utiliser pour calculer les termes d'advection :  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U})$  et visqueux  $\nabla \cdot (2\mu \mathbf{D})$
- Choisir la méthode de résolution des équations de pression  $\nabla p$
- implémenter les conditions limites

Et dans le cas multiphasique :

- trouver comment traquer l'interface
- prendre en compte les différences de densités ainsi que les viscosités dans les deux phases
- représenter numériquement la tension superficielle.

### 2.3.1 Discrétisation temporelle

*Gerris* utilise une discrétisation décalée en temps pour la fraction de volume, la pression et la densité. Cela conduit à une discrétisation de second ordre en temps, qui à l'étape  $n$  des équations de Navier-Stokes (2.1) donne :

$$\rho_{n+1/2} \left[ \frac{\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n}{\Delta t} + \mathbf{U}_{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{U}_{n+1/2} \right] = -\nabla p_{n+1/2} + \nabla \cdot [\mu_{n+1/2}(\mathbf{D}_n + \mathbf{D}_{n+1})] + (\sigma \kappa \delta_s \mathbf{n})_{n+1/2} + \mathbf{F}_{ext}, \quad (2.3a)$$

$$\frac{c_{n+1/2} - c_{n-1/2}}{\Delta t} + \nabla \cdot (c_n \mathbf{U}_n) = 0, \quad (2.3b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_n = 0. \quad (2.3c)$$

En utilisant la méthode de projection, un champ de vitesse provisoire  $\mathbf{U}^*$  est calculé dans un premier temps suivant la décomposition de Hodge (voir Chorin [10]) :

$$\rho_{n+1/2} \left[ \frac{\mathbf{U}^* - \mathbf{U}_n}{\Delta t} + \mathbf{U}_{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{U}_{n+1/2} \right] = \nabla \cdot [\mu_{n+1/2}(\mathbf{D}_n + \mathbf{D}_*)] + (\sigma \kappa \delta_s \mathbf{n})_{n+1/2} + \mathbf{F}_{ext}, \quad (2.4a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_n = 0 \quad (2.4b)$$

Une fois le champ provisoire calculé le champ final est déduit sous forme de :

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho_{n+1/2}} \nabla p_{n+1/2}, \quad (2.5a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_{n+1} = 0. \quad (2.5b)$$

On peut donc récrire l'ensemble des équations de Navier-Stokes à l'étape  $t = n$  :

$$\rho_{n+1/2} \left[ \frac{\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n}{\Delta t} + \mathbf{U}_{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{U}_{n+1/2} \right] = -\nabla p_{n+1/2} + \nabla \cdot [\mu_{n+1/2}(\mathbf{D}_n + \mathbf{D}_{n+1})] + (\sigma \kappa \delta_s \mathbf{n})_{n+1/2} + \mathbf{F}_{ext}, \quad (2.6a)$$

$$\frac{c_{n+1/2} - c_{n-1/2}}{\Delta t} + \nabla \cdot (c_n \mathbf{U}_n) = 0, \quad (2.6b)$$

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{\rho_{n+1}} \nabla p_{n+1/2}, \quad (2.6c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_{n+1} = 0. \quad (2.6d)$$

L'équation traduisant l'incompressibilité du fluide à l'étape  $n + 1$  :

$\nabla \cdot \mathbf{U}^{n+1} = 0$  peut être réécrite alors sous la forme d'une équation de Poisson :

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\Delta t}{\rho_{n+1/2}} \nabla p \right] = \nabla \cdot \mathbf{U}_*, \quad (2.7)$$

qui sera résolue en utilisant le "solveur multi-niveaux quad/octree" décrit en détail dans l'article de Popinet [44].

L'équation de la quantité de mouvement devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{n+1/2}}{\Delta t} \mathbf{U}_* - \nabla \cdot [\mu_{n+1/2} \mathbf{D}_*] &= [\mu_{n+1/2} \mathbf{D}_*] + \rho_{n+1/2} \left[ \frac{\mathbf{U}_n}{\Delta t} - \mathbf{U}_{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{U}_{n+1/2} \right] \\ &+ (\sigma \kappa \delta_s \mathbf{n})_{n+1/2} + \mathbf{F}_{ext}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

avec tous les termes à droite exprimés uniquement en fonction des temps  $n$  et  $n + 1/2$ . Cette équation est du type Helmholtz qui peut être efficacement résolue en utilisant un "solveur" de Poisson à multi-niveaux basé sur un maillage "quad/octree". La discrétisation résultante de Crank-Nicholson du terme visqueux est formellement du second ordre et inconditionnellement stable. Le terme d'advection de vitesse  $\mathbf{U}_{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{U}_{n+1/2}$  est estimé en utilisant le schéma de Godunov du second ordre décalé de Bell-Colella-Glaz [4]. Ce schéma est stable pour un nombre de "Courant-Friedrichs-Lewy" (CFL) plus petit que 1.

### 2.3.2 Discrétisation spatiale

La discrétisation du domaine de calcul se fait par pavés carrés dans le plan (quad) ou des cubes en dimension 3 (octree). Ces cellules "quad/octree" sont organisées de manière hiérarchique en respectant un certain nombre de règles :

- chaque cellule est un volume fini, pouvant être parent de 4 cellules filles (8 en 3-D)
- le niveau de maillage des cellules commence par zéro pour la cellule de base et augmente par pas de 1 à chaque génération de 4 cellules filles
- chaque cellule est voisine directe de l'autre par face commune et dans chacune des 4 directions en 2-D (8 en 3-D)
- les cellules du voisinage directe ainsi que celles de la diagonale ne peuvent avoir plus d'un niveau de maillage de différence
- pour les écoulement diphasique toutes les cellules voisines d'une cellule mixte (cellule contenant l'interface entre les deux fluides) doivent être de même niveau de maillage

Aux centres des cellules, *Gerris* utilise une grille de collocation : toutes les variables sont définies au centre de chaque cellule. Ce choix est nécessaire pour l'utilisation du schéma d'advection de Godunov [4] pour la quantité de mouvement et simplifie l'implémentation de la discrétisation de la méthode de Crank-Nicholson pour le terme visqueux.



La discrétisation spatiale de l'équation de pression corrigée (2.6 c) et la divergence associée dans l'équation de poisson (2.7) sont calculées par la méthode de projection d'Almgren et al. [63]. Le champ de vitesse provisoire  $\mathbf{U}_*^c$  est d'abord calculé au centre de la cellule par l'équation de mouvement (2.8). Ensuite au centre de la face  $\mathbf{U}_*^f$ , en utilisant la moyenne des valeurs au centre de toutes les faces des volumes de la discrétisation cartésienne.

La divergence de  $\mathbf{U}_*$ , dans l'équation (2.8), est alors calculée sur chaque volume de contrôle comme une approximation de volume fini :

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_* = \frac{1}{h} \sum \mathbf{U}_*^f \cdot \mathbf{n}^f, \quad (2.9)$$

avec  $\mathbf{n}^f$  le vecteur unitaire normal à la face de la cellule et  $h$  l'échelle de longueur du volume de contrôle. Une fois résolue cette dernière on réévalue la pression corrigée :

$$\mathbf{U}_{n+1}^f = \mathbf{U}_*^f - \frac{\Delta t}{\rho_{n+1/2}^f} \nabla^f p_{n+1/2}, \quad (2.10)$$

où  $\rho_{n+1/2}^f$  est obtenue par moyenne des valeurs au centre de la cellule  $\rho_{n+1/2}^c$  et  $\nabla^f$ , l'opérateur gradient par rapport au centre d'une face de la cellule. Le champ de vitesse au centre de la face résultant  $\mathbf{U}_{n+1}^f$ , a une divergence nulle par construction. Enfin le champ de vitesse à  $t = n + 1$  est alors déduit par la formule :

$$\mathbf{U}_{n+1}^c = \mathbf{U}_*^c - \left| \frac{\Delta t}{\rho_{n+1/2}^f} \nabla^f p_{n+1/2} \right|^c, \quad (2.11)$$

où l'opérateur  $|\cdot|^c$  dénote la moyenne de sur toutes les faces délimitant le volume de contrôle. Le champ de vitesse au centre de la cellule résultant  $\mathbf{U}_{n+1}^c$ , est approximativement à divergence nulle.

## 2.4 Schéma d'advection Volume Of Fluid (VOF)

La résolution de l'équation d'advection pour une fraction de volume se fait par la méthode de VOF : Volume Of Fluid (voir Li [30, 31], Scardovelli & Zaleski [55, 56, 57]). L'idée principale de la méthode VOF est d'utiliser un champ scalaire pour repérer les deux fluides. Ce champ scalaire s'appelle fonction de Heaviside  $H(x, t)$  dont la valeur est égale à 1 lorsque la variable position  $x$  est dans le fluide 1, et 0 lorsqu'elle est dans le fluide 2 (voir figure 2.2). Cette fonction représente le volume occupé par le fluide dans une cellule de calcul. Ainsi, une cellule pleine du fluide (phase 1) a la valeur 1 et une cellule pleine de gaz (phase 2) a la valeur 0. Si la valeur de la fraction volumique

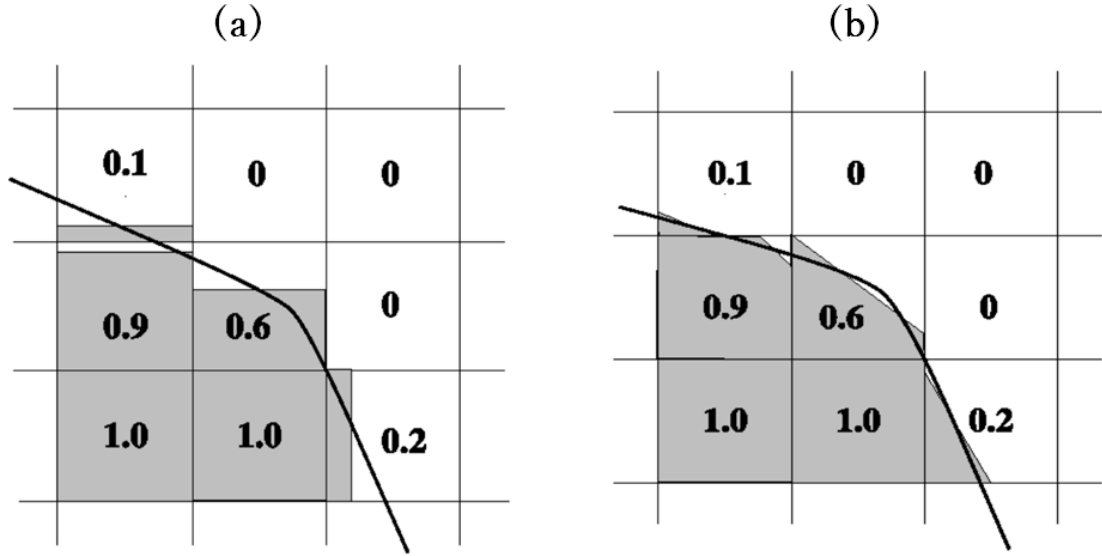


FIGURE 2.2 – Principe de la méthode de VOF. (a) : construction de l'interface par la fonction couleur. (b) : reconstruction de l'interface basée sur le calcul des pentes de l'interface dans chaque cellule.

est comprise entre ces deux valeurs, cela indique la présence de l'interface, comme le montre la figure 2.2.

Considérons une cellule  $\delta$ , sa fraction volumique  $c_\delta$  de volume  $V$  est définie par :

$$c_\delta(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \int_V H(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.12)$$

L'équation d'advection de cette fraction volumique s'écrit :

$$\partial_t c_\delta + \nabla \cdot (c_\delta \mathbf{U}) = 0. \quad (2.13)$$

Après advection, il faut reconstruire l'interface dans les mailles où la fraction volumique est comprise entre 0 et 1. Elle est décrite par l'équation :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \alpha \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale locale à l'interface et  $\mathbf{x}$  le vecteur position. Supposés connus, la fraction volumique  $c$  et  $\mathbf{n}$ ,  $\alpha$  est uniquement déterminé par le fait que le volume du fluide contenu dans la cellule est égal à  $c$ . Ce volume est calculé en tenant compte des différentes manières dont la cellule de calcul, un carré en 2D (respectivement un cube en 3D) peut être coupée par une ligne (respectivement un plan en 3D). Il en résulte

donc que  $\alpha$  est une fonction linéaire ou quadratique en 2D (respectivement cubique en 3D) par morceaux (voir Gueyffier et al. [19], Scardovelli et al. [56]).

L'estimation de la normale locale à l'interface et basée sur le calcul de fraction volumique, en appliquant la Mixed Youngs-Centered method (MYC) (voir Aulisa et al [2]), sur des cellules voisines de celle considérée, soit une grille cartésienne régulière de  $3 \times 3$  (respectivement  $3 \times 3 \times 3$ ).

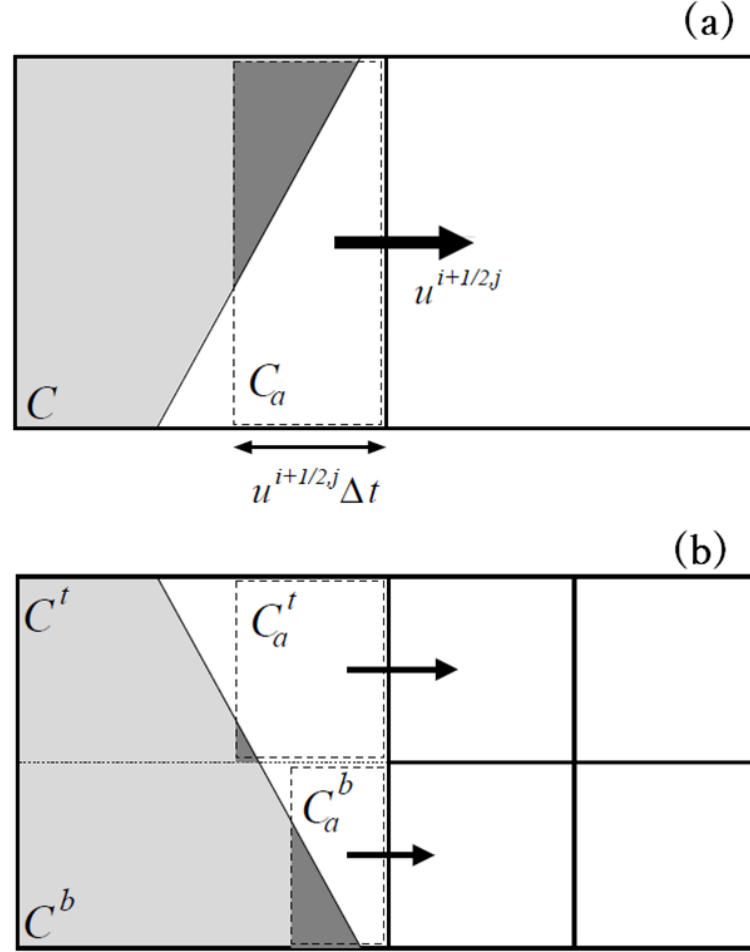


FIGURE 2.3 – Estimation du flux géométrique. **(a)** : estimation du flux de  $C_a$  (délimité en pointillés, avec (en gris) la fraction volumique occupée par la phase 1 du fluide) de la cellule  $C$ , advecté vers la droite à la vitesse  $U^{i+1/2,j}$  dans une cellule voisine de même niveau. **(b)** : cas de l'estimation du flux entre des cellules de niveaux différents

Après reconstruction, il est nécessaire de réévaluer le volume de chaque cellule. Pour le faire, il faut les flux géométriques de directions fractionnées, calculés sur les grilles cartésiennes régulières (figure 2.3, **(a)**). *Gerris* utilise la schéma de construction d'interface affine par morceaux [30], appelée schéma d'advection Lagrangien explicite

( Scardovelli & Zaleski [57]).

Pour généraliser ce schéma d'advection à la discrétisation spatiale "quad/octree" il suffit d'adapter le schéma lorsqu'il faut calculer le flux entre des cellules de niveaux différents (figure 2.3, (b)).

Ce schéma d'advection préserve la condition  $0 < c_\sigma < 1$ . Il a été démontré qu'il était proche de la solution dans des cas où une solution analytique existe [2]. Bien que ce schéma ne soit pas strictement conservatif (voir Rider & Kothe [53]), les erreurs de conservation totale pour des problèmes difficiles sont dans la plupart des cas inférieures à 0.01%.

### 2.4.1 Évaluation de la tension de surface

L'estimation du terme de la tension de surface, dans l'équation de la quantité de mouvement discrétisée  $(\sigma\kappa\delta_s\mathbf{n})_{n+1/2}$ , s'avère un des aspects les plus difficiles dans l'application de la méthode de VOF pour des fluides avec tension de surface.

Dans le cas de la méthode de VOF, l'approche de "Continuum-Surface-Force" (CSF) [6], propose l'approximation suivante :

$$\sigma\kappa\delta_s\mathbf{n} \approx \sigma\nabla\bar{c} \quad (2.15)$$

$$\kappa \approx \nabla \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{n}} \equiv \frac{\nabla\bar{c}}{|\nabla\bar{c}|}, \quad (2.16)$$

avec  $\bar{c}$  le champ de la fraction volumique spatialement filtré. Malheureusement cette approche souffre de courant parasite lorsqu'elle est appliquée dans le cas d'une goutte stationnaire en équilibre théorique (voir [20, 27, 46]).

Plus récemment Renardy et al. [52], Francois et al. [17], montrent que : dans ce cas particulier, puisque l'équation de la conservation du moment discrétisée se réduit à :

$$-\nabla p_{n+1/2} + \sigma\kappa(\delta_s)_{n+1/2} = 0, \quad (2.17)$$

cette dernière est équivalente, en utilisant l'approximation CSF à :

$$-\nabla p_{n+1/2} + \sigma\kappa(\nabla\bar{c})_{n+1/2} = 0. \quad (2.18)$$

Il est alors possible de retrouver l'équilibre discret exact entre la tension de surface et le gradient de pression à condition que :

1. les approximations discrètes des deux opérateurs gradients dans cette équation soient compatibles
2. la courbure estimée  $\kappa$  soit constante.

Dans le schéma localisé présent, le gradient de la pression au centre de la cellule est calculé en moyennant les gradients de la pression au centre des faces comme l'indique l'équation 2.6. Afin de vérifier la première condition, la tension de surface est établie en appliquant d'abord, la force de la tension de surface au champ de vitesse auxiliaire au centre des faces  $\overline{U}_n^f$  pour en tirer le champs de vitesse  $U_*^f$  suivant l'expression :

$$U_*^f = \overline{U}_*^f + \frac{\Delta t \sigma \kappa_{n+1/2}^f}{\rho (c_{n+1/2}^f)} \nabla^f c_{n+1/2}. \quad (2.19)$$

Par suite la tension de surface sera appliquée au centre de la cellule correspondant à  $U_*^c$ , soit :

$$U_*^c = \overline{U}_*^c + \left| \frac{\Delta t \sigma \kappa_{n+1/2}^f}{\rho (c_{n+1/2}^f)} \nabla^f \right|^c c_{n+1/2}, \quad (2.20)$$

qui sera appliquée juste avant l'étape de la projection. Pour que l'estimation de la courbure soit robuste et précise, son calcul se fait avec la fonction de hauteur (HF). Pour des grilles cartésiennes, ce calcul se fait en trois étapes :

- la première consiste à trouver la grille centrée sur la cellule où la courbure est à évaluer, la grille en question commence par une cellule vide et s'arrête lorsqu'une cellule pleine est atteinte
- la deuxième étape consiste à construire une approximation discrète de la hauteur de l'interface  $y = f(x)$  en sommant les fractions volumiques de chaque colonne ou ligne
- la dernière étape consiste à utiliser les approximations de différences finies des dérivées des fonctions de la hauteur discrétisée pour calculer la courbure :

$$\kappa = \frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}} \Big|_{x=0} \quad (2.21)$$

## 2.5 Conclusion

*Gerris* est un code de résolution numérique des équations de Navier-Stokes, pour des écoulements incompressibles diphasiques. Il est écrit en langage *C* par Popinet ([45, 44, 46]) et fonctionne sur la base d'un fichier de paramètre (appelé fichier *gfs*) dans lequel sont codées toutes les conditions initiales de l'écoulement. Le maillage dans le code est adaptatif et est assuré par le système "quad/octree". La discrétisation des équations de Navier-Stokes avec *Gerris* est décalée en temps, et est basée sur la décomposition de Hodge pour la vitesse. La pression au centre de chaque cellule est obtenue par moyenne sur toutes les faces de la cellule, par la résolution multi-grilles des

équations de Poisson. L'advection de l'interface est basée sur la méthode Volume-of-Fluid (VOF) et la tension de surface est calculée par la méthode des forces compensées.

Ce chapitre est un résumé, qui ne montre que les grandes lignes des méthodes numériques implémentées dans le logiciel. Nous invitons le lecteur s'il est intéressé, à lire les articles de Popinet ([45, 44, 46]), pour plus de détails. Ce résumé est en grande partie écrit à partir de ces articles. Et pour des validations, nous conseillons au lecteur de visiter le site wiki dédié au logiciel : [gfs.sourceforge.net/](http://gfs.sourceforge.net/).



- [1] ANTKOWIAK, A., BREMOND, N., LE DIZES, S., AND VILLERMAUX, E. Short-term dynamics of a density interface following an impact. *Journal of Fluid Mechanics* 577 (2007), 241–250.
- [2] AULISA, E., MANSERVISI, S., SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Interface reconstruction with least-squares fit and split advection in three-dimensional cartesian geometry. *Journal of Computational Physics* 225, 2 (2007), 2301–2319.
- [3] BAYVEL, L., AND ORZECOWSKI, Z. Liquid atomization, combustion : An international series, 1993.
- [4] BELL, J. B., AND MARCUS, D. L. A second-order projection method for variable-density flows. *Journal of Computational Physics* 101, 2 (1992), 334–348.
- [5] BLANCHARD, D. C., AND HEINRICH, B. C. *From raindrops to volcanoes*. Doubleday Garden City, NY, 1967.
- [6] BRACKBILL, J., KOTHE, D. B., AND ZEMACH, C. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of computational physics* 100, 2 (1992), 335–354.
- [7] BREMOND, N. *Stabilité et atomisation des nappes liquides*. PhD thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I, 2003.
- [8] BRENNER, M. P., AND GUEYFFIER, D. On the bursting of viscous films. *Physics of Fluids* 11 (1999), 737–739.
- [9] CASTREJÓN-PITA, A. A., CASTREJON-PITA, J., AND HUTCHINGS, I. Breakup of liquid filaments. *Physical review letters* 108, 7 (2012), 074506.
- [10] CHORIN, A. J. On the convergence of discrete approximations to the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation* 23, 106 (1969), 341–353.



- [11] CONRATH, M., CANFIELD, P., BRONOWICKI, P., DREYER, M. E., WEISLOGEL, M. M., AND GRAH, A. Capillary channel flow experiments aboard the international space station. *Physical Review E* 88, 6 (2013), 063009.
- [12] CULICK, F. Comments on a ruptured soap film. *Journal of applied physics* 31, 6 (1960), 1128–1129.
- [13] DE LA GRANGE, J. L. *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés : avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques*. Bachelier, 1826.
- [14] DRIESSEN, T., JEURISSEN, R., WIJSHOFF, H., TOSCHI, F., AND LOHSE, D. Stability of viscous long liquid filaments. *Physics of Fluids (1994-present)* 25, 6 (2013), 062109.
- [15] EGGERS, J. Universal pinching of 3d axisymmetric free-surface flow. *Physical Review Letters* 71, 21 (1993), 3458.
- [16] EGGERS, J., AND DUPONT, T. F. Drop formation in a one-dimensional approximation of the navier–stokes equation. *Journal of fluid mechanics* 262 (1994), 205–221.
- [17] FRANCOIS, M. M., CUMMINS, S. J., DENDY, E. D., KOTHE, D. B., SICILIAN, J. M., AND WILLIAMS, M. W. A balanced-force algorithm for continuous and sharp interfacial surface tension models within a volume tracking framework. *Journal of Computational Physics* 213, 1 (2006), 141–173.
- [18] GHABACHE, E., ANTKOWIAK, A., JOSSEERAND, C., AND SÉON, T. On the physics of fizziness : How bubble bursting controls droplets ejection. *Physics of Fluids (1994-present)* 26, 12 (2014), 121701.
- [19] GUEYFFIER, D., LI, J., NADIM, A., SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *Journal of Computational Physics* 152, 2 (1999), 423–456.
- [20] HARVIE, D. J., DAVIDSON, M., AND RUDMAN, M. An analysis of parasitic current generation in volume of fluid simulations. *Applied mathematical modelling* 30, 10 (2006), 1056–1066.
- [21] HOYT, J. W., AND TAYLOR, J. Waves on water jets. *Journal of Fluid Mechanics* 83, 01 (1977), 119–127.
- [22] JAMES, A., VUKASINOVIC, B., SMITH, M. K., AND GLEZER, A. Vibration-induced drop atomization and bursting. *Journal of Fluid Mechanics* 476 (2003), 1–28.

- [23] KELLER, H. Lectures on numerical methods in bifurcation problems. *Applied Mathematics* 217 (1987), 50.
- [24] KELLER, J. B. Breaking of liquid films and threads. *Physics of Fluids (1958-1988)* 26, 12 (1983), 3451–3453.
- [25] KELLER, J. B., AND MIKSI, M. J. Surface tension driven flows. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 43, 2 (1983), 268–277.
- [26] KUBITSCHKE, J., AND WEIDMAN, P. Helical instability of a rotating liquid jet. *Physics of Fluids* 20, 9 (2008), 91104.
- [27] LAFAURIE, B., NARDONE, C., SCARDOVELLI, R., ZALESKI, S., AND ZANETTI, G. Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with surfer. *Journal of Computational Physics* 113, 1 (1994), 134–147.
- [28] LAPLACE, P. S. *Traité de mécanique céleste/par PS Laplace...; tome premier [-quatrième]*, vol. 4. de l’Imprimerie de Crapelet, 1805.
- [29] LHUISSIER, H., AND VILLERMAUX, E. Soap films burst like flapping flags. *Physical review letters* 103, 5 (2009), 054501.
- [30] LI, J. Calcul d’interface affine par morceaux. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, astronomie* 320, 8 (1995), 391–396.
- [31] LI, J. *Résolution numérique de l’équation de Navier-Stokes avec reconnection d’interfaces. Méthode de suivi de volume et application à l’atomisation*. PhD thesis, 1996.
- [32] LOWRY, B. J., AND STEEN, P. H. Stability of slender liquid bridges subjected to axial flows. *Journal of Fluid Mechanics* 330 (1997), 189–213.
- [33] MADDOKS, J. H. Stability and folds. *Archive for Rational mechanics and Analysis* 99, 4 (1987), 301–328.
- [34] MARMOTTANT, P. *Atomisation d’un liquide par un courant gazeux*. PhD thesis, Grenoble, INPG, 2001.
- [35] MARTÍNEZ, I., AND PERALES, J. Liquid bridge stability data. *Journal of crystal growth* 78, 2 (1986), 369–378.
- [36] MESEGUER, J. The influence of axial microgravity on the breakage of axisymmetric slender liquid bridges. *Journal of crystal growth* 62, 3 (1983), 577–586.
- [37] M’KENDRICK, J. G. Helmholtz in berlin—physical researches continued [1].
- [38] MYSHKIS, A., BABSKII, V., KOPACHEVSKII, N., SLOBOZHANIN, L., TYUPTSOV, A., AND WADHWA, R. Low-gravity fluid mechanics. *Translated from the*

- Russian by Wadhwa, RS, XIX, 583 pp. 218 figs.. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1 (1987).*
- [39] NIKITOPOULOS, D. E., AND KELLY, A. J. Formation of a net-negative charged liquid spray. *Physics of Fluids (1994-present)* 12, 9 (2000), S7–S7.
  - [40] NOTZ, P. K., AND BASARAN, O. A. Dynamics and breakup of a contracting liquid filament. *Journal of Fluid Mechanics* 512 (2004), 223–256.
  - [41] PLATEAU, J. *Acad. Sci.*, vol. XVI. Bruxelles Mém., 1843.
  - [42] PLATEAU, J. *Acad. Sci.*, vol. XXIII. Bruxelles Mém., 1849.
  - [43] PLATEAU, J. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, vol. 2. Gauthier-Villars, 1873.
  - [44] POPINET, S. Gerris : a tree-based adaptive solver for the incompressible euler equations in complex geometries. *Journal of Computational Physics* 190, 2 (2003), 572–600.
  - [45] POPINET, S. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *Journal of Computational Physics* 228, 16 (2009), 5838–5866.
  - [46] POPINET, S., AND ZALESKI, S. A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 30, 6 (1999), 775–793.
  - [47] QUERE, D., DE GENNES, P., BROCHARD-WYART, F., AND REISINGER, A. Capillarity and wetting phenomena : Drops, bubbles, pearls, waves, 2004.
  - [48] RAYLEIGH, L. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proceedings of the London Mathematical Society* 1, 1 (1879), 57–72.
  - [49] RAYLEIGH, L. Some applications of photography. *Nature* 44, 1133 (1891), 249–254.
  - [50] RAYLEIGH, L. *Sci. Papers*, vol. I. 1899.
  - [51] RAYLEIGH, L. *Sci. Papers*, vol. III. 1902.
  - [52] RENARDY, Y., AND RENARDY, M. Prost : a parabolic reconstruction of surface tension for the volume-of-fluid method. *Journal of Computational Physics* 183, 2 (2002), 400–421.
  - [53] RIDER, W. J., AND KOTHE, D. B. Reconstructing volume tracking. *Journal of computational physics* 141, 2 (1998), 112–152.
  - [54] SAVART, F. Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Ann. Chim. Phys* 53, 337 (1833), 1833.

- [55] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annual review of fluid mechanics* 31, 1 (1999), 567–603.
- [56] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Analytical relations connecting linear interfaces and volume fractions in rectangular grids. *Journal of Computational Physics* 164, 1 (2000), 228–237.
- [57] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Interface reconstruction with least-square fit and split eulerian–lagrangian advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 41, 3 (2003), 251–274.
- [58] SCHULKES, R. The contraction of liquid filaments. *Journal of Fluid Mechanics* 309 (1996), 277–300.
- [59] SÉBILLEAU, J., LIMAT, L., AND EGGERS, J. Flow separation from a stationary meniscus. *Journal of Fluid Mechanics* 633 (2009), 137–145.
- [60] SIEROU, A., AND LISTER, J. R. Self-similar recoil of inviscid drops. *Physics of Fluids (1994-present)* 16, 5 (2004), 1379–1394.
- [61] SLOBOZHANIN, L. A., AND PERALES, J. M. Stability of liquid bridges between equal disks in an axial gravity field. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics (1989-1993)* 5, 6 (1993), 1305–1314.
- [62] STONE, H. A., AND LEAL, L. Relaxation and breakup of an initially extended drop in an otherwise quiescent fluid. *Journal of Fluid Mechanics* 198 (1989), 399–427.
- [63] SUSSMAN, M., ALMGREN, A. S., BELL, J. B., COLELLA, P., HOWELL, L. H., AND WELCOME, M. L. An adaptive level set approach for incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics* 148, 1 (1999), 81–124.
- [64] THOMSON, W. Hydrokinetic solutions and observations.(lord kelvin). In *Proc. Royal Soc* (1871), vol. 7, p. 63.
- [65] TJAHHADI, M., STONE, H., AND OTTINO, J. Satellite and subsatellite formation in capillary breakup. *Journal of Fluid Mechanics* 243 (1992), 297–317.
- [66] WEBER, C. Zum zerfall eines flüssigkeitsstrahles. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 11, 2 (1931), 136–154.
- [67] ZEFF, B. W., KLEBER, B., FINEBERG, J., AND LATHROP, D. P. Singularity dynamics in curvature collapse and jet eruption on a fluid surface. *Nature* 403, 6768 (2000), 401–404.



## CHAPITRE 3

# SEGMENTATION CAPILLAIRE : PHÉNOMÈNE D'ÉVITEMENT DE L'ÉTRANGLEMENT

### Sommaire

3.1	Introduction . . . . .	57
3.2	Simulations Numériques . . . . .	59
3.3	Nos expériences sur l'évitement . . . . .	67
3.4	Cas des ligaments visqueux : théorie linéaire . . . . .	70
3.5	Analyse du mécanisme . . . . .	72
3.6	Segmentation de ligaments entiers . . . . .	73
3.7	Cas des ligaments courts . . . . .	77
3.8	Taille des gouttes par l'évitement . . . . .	79
3.9	Généralité du phénomène d'évitement . . . . .	80
3.10	Conclusion . . . . .	86

### 3.1 Introduction

Nous avons observé dans le premier chapitre que tout processus d'atomisation passe par une phase de formation de ligaments qui s'étirent et qui se fragmentent en gouttelettes. Le processus de fragmentation du ligament liquide est régi par deux instabilités : soit par l'instabilité de Rayleigh-Plateau ([42, 49]) lorsque le ligament est infini, soit par le phénomène du *end pinching* [62], lorsqu'il est fini. Dans le premier cas (ligament infini), toute perturbation de la surface du ligament par une longueur d'onde supérieure à son périmètre, conduit irrémédiablement à sa segmentation. Dans le deuxième

cas (ligament de longueur finie), le ligament se rétracte par son bout sous l'effet de la capillarité. Un bourrelet se forme (les détails sur la formation du bourrelet et le cou du ligament sont présentés dans le chapitre 1, et sont résumés sur la première colonne de la figure 3.8) et se détache du ligament liquide sous forme d'une goutte. Ce mécanisme de rétractation est important et son étude est fondamentale pour comprendre la relaxation d'un volume de liquide.

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser au cas des ligaments semi-infinis. Nous partirons du cas simple de la segmentation d'un ligament liquide de forme cylindrique sous l'effet de sa tension de surface. Il a été montré dans ce cas (voir le chapitre 1) que la rétractation dépend de deux nombres sans dimension : le rapport d'aspect du ligament  $L/2R$  et le nombre d'Ohnesorge  $Oh = \mu/\sqrt{\sigma\rho R}$ , avec  $R$  le rayon du ligament,  $\mu$  sa viscosité,  $\rho$  sa densité et  $\sigma$  sa tension de surface. Une question importante à laquelle nous tenterons de répondre est de savoir si on peut prédire la segmentation ou la non-segmentation d'un ligament liquide dont nous connaissons ses deux paramètres :  $L/R$  et  $Oh$ . Nous adopterons deux démarches, les simulations numériques en axisymétrie avec *Gerris*, et des études expérimentales sur la rétractation capillaire pour répondre à cette question.

Au cours de nos simulations sur la rétractation du ligament semi-infini, nous avons observé un mécanisme étonnant, qui empêche la segmentation du ligament visqueux : nous l'avons nommé l'"évitement de l'étranglement". Nous montrerons que ce phénomène joue un rôle central dans le mécanisme de la segmentation et qu'il est caractéristique d'un lâcher tourbillonnaire à l'intérieur du bourrelet du ligament.

Le modèle 1D des équations de Navier-Stokes [15] (1994), reste un outils incontournable pour étudier les ligaments liquides relativement longs et allongés, comme c'est le cas des ligaments semi-infinis (le modèle est décrit dans le chapitre 5 de notre manuscrit). En 2004, Notz & Basaran [40] montrent que ce modèle est insuffisant pour reproduire le cas des ligaments d'une certaine plage de viscosités : la segmentation se produit, dans ces cas, un peu plus tard que la prédiction du modèle 1D. Notz et al. (2004) ont particulièrement observé, pour ces ligaments visqueux, la formation d'une couche de vorticité au niveau du la zone de segmentation du ligament. Ils montrent alors que cette formation de couche de vorticité est non linéaire, et est impossible à capter par le modèle 1D de Eggers & Dupont [15].

Malheureusement Notz & Basaran ne sont pas allés plus loin dans leurs études pour observer la formation d'un anneau tourbillonnaire qui sera éjecté vers l'avant du bourrelet et qui se trouve être responsable de la non segmentation du ligament.

## 3.2 Simulations Numériques

### 3.2.1 Historique sur notre première observation du phénomène d'évitement

Dans leur ouvrage *Gouttes, bulles, perles et ondes*, De Gennes et al. [47] ont fait une analyse simplifiée sur l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Elle consiste à considérer que le cylindre liquide, de volume fixé, se fragmente en gouttelettes, dès que la somme totale de la surface de ces gouttelettes est inférieure à celle du cylindre liquide. C'est une manière simple de comprendre le mécanisme de réduction de la surface totale du corps liquide par capillarité. Considérons un fragment de cylindre liquide de longueur  $\lambda$  et de rayon 1, se relaxant en une goutte sphérique de même volume, par la tension de surface. D'après l'analyse simplifiée de De Gennes et al. [47] (page 18), au delà de la valeur critique  $\lambda_c = 4.5$ , la surface de la sphère obtenue est inférieure à celle du cylindre liquide, et dans ce cas le cylindre liquide devient instable pour réduire sa surface. Cette valeur est bien inférieure à la valeur critique réelle, trouvée par Plateau [42] et qui est  $2\pi$ .

Nous avons tenté d'étendre cette analyse simplifiée au cas de l'instabilité suite à un pincement de ligament liquide de diverses formes : par exemple dans quelles conditions est-il possible de réduire la surface de la parabole liquide, de volume donné, en une sphère de même volume ?

Nous avons alors exploré diverses formes axisymériques du corps liquide, suivant l'équation  $r = az^\alpha$  (avec  $r$  et  $z$ , les composantes radiale et axiale de l'interface liquide) : en variant  $\alpha$  de 0 (c'est le cas d'une interface plane) à l'infini (c'est le cas du cylindre liquide). En fonction de la forme du corps liquide, nous déduisons par l'analyse simplifiée, la longueur critique à partir de laquelle la surface de la sphère, de même volume, devient inférieure à celle du corps liquide. Ensuite nous avons tracé la variation de cette longueur critique en fonction de la forme de l'interface du corps liquide,  $r = az^\alpha$  (figure 3.1, (b)).

Le cas de la parabole liquide ( $\alpha = 2$ ) est représenté sur la figure 3.1, (a). Considérons que nous avons une parabole liquide de hauteur  $H_0$ , de volume  $V_0$  et de surface  $S_0$ . On désigne par  $\lambda$ , la hauteur à laquelle on coupe cette parabole et on suppose que celle-ci est entièrement recueillie dans une sphère de même volume  $V_2$  et de surface  $S_2$  (figure 3.1, (a)). Le reste de la parabole originale de hauteur  $(H_0 - \lambda)$ , après coupure, est supposé intouchable : il a donc un volume  $V_1 = V_0 - V_2$  et une surface  $S_1$ . L'analyse simplifiée stipule que la parabole liquide se fragmenterait ainsi pour diminuer son énergie de surface, dès que  $S_0 \leq S_1 + S_2$ . La longueur critique de fragmentation  $\lambda_c$  se



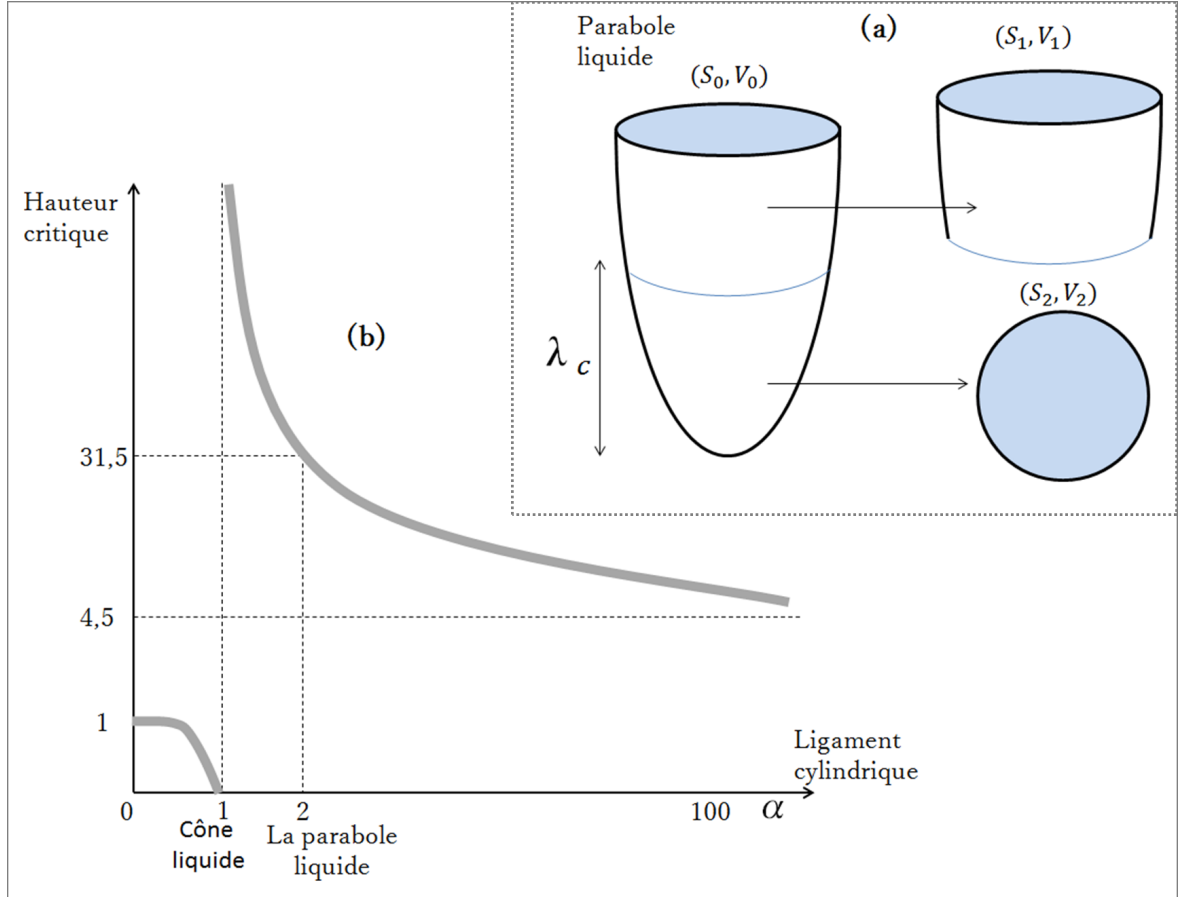


FIGURE 3.1 – (a) : analyse simplifiée de la réduction de surface de la parabole liquide. Il s'agit de trouver, pour  $V_0 = V_1 + V_2$ , la hauteur critique  $\lambda_c$  correspondante à  $S_0 = S_1 + S_2$ . (b) : évolution de hauteur critique correspondant à la réduction de surface en fonction de la forme du ligament  $r = az^\alpha$ .

déduit alors de l'équation  $S_0 = S_1 + S_2$ .

Nous avons ensuite réalisé des simulations numériques pour les comparer avec l'analyse simplifiée. Les comparaisons montrent que l'analyse simplifiée est insuffisante pour décrire la segmentation. Par exemple, pour la parabole ( $\alpha = 2$ ) l'analyse simplifiée prédit une hauteur critique de segmentation au delà de  $\lambda_c \approx 31.5$ , tandis que les simulations montrent que la segmentation est impossible dans le cas de la parabole liquide. Pour le cylindre liquide, l'analyse simplifiée prédit  $\lambda_c = 4.5$ , plus petite que les  $2\pi$  de Plateau [42] et qui est environ égale à  $6.33 \approx 2\pi$  dans nos simulations.

Bien que l'analyse simplifiée de [47] est insuffisante pour expliquer la relaxation des corps liquides, elle nous a conduit à faire des simulations sur le cylindre liquide où nous avons pour la première fois observé le phénomène étonnant : l'évitement de l'étranglement, qui sera décrit dans la section suivante.

### 3.2.2 Simulations numériques de la segmentation des ligaments liquides

Avec le logiciel *Gerris*, nous avons effectué des simulations numériques sur la rétraction de ligaments liquides semi-infinis. Ces simulations sont effectuées dans des conditions similaires à Notz & Basaran (2004).

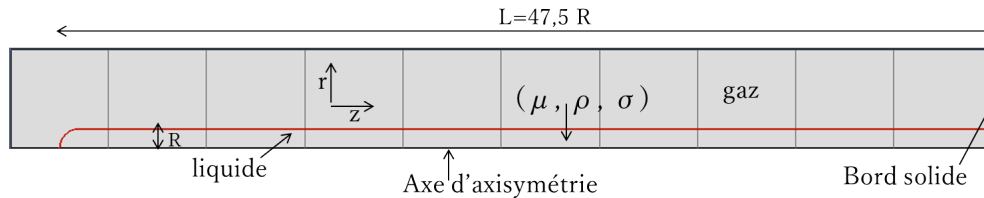


FIGURE 3.2 – Condition initiale :  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $\mu$  est un paramètre variable. La longueur initiale du ligament semi-infini est  $L = 47.5R$ , assez long pour se fragmenter.

La condition initiale est un demi-cylindre liquide de rayon  $R = 1$ , de longueur  $L = 47.5$  et avec un bout sphérique, également de rayon 1. La très grande longueur  $L = 47.5R$  du ligament (semi-infini) est choisie pour deux raisons principales : la première pour pouvoir se fragmenter selon les prédictions de Notz & Basaran [40] (la demi-longueur critique de segmentation est environ 6.5) ; la deuxième, pour éviter que les ondes capillaires générées au cours de la rétraction capillaire ne rebondissent sur les parois solides de nos boîtes de simulations (à droite sur la figure 3.2) pour créer à leurs tours des ondes retours qui viennent interférer avec les autres. Cette longueur restera constante dans toutes nos simulations et le seul paramètre que nous allons

varier est le nombre d'Ohnesorge  $Oh = \mu / \sqrt{\sigma \rho R}$ , avec  $\mu$  la viscosité du ligament, et  $\sigma$  sa tension de surface. Les propriétés physiques imposées pour le ligament sont ( $\sigma = 1$ ,  $\rho = 1$ , et  $\mu$  qui sera une variable). Le ligament est entouré par un gaz non visqueux et cent fois moins dense. Le domaine de simulation est constitué de 10 boîtes de longueur 5 (voir figure 3.2). Les simulations sont axisymétriques et le fond des boîtes constitue l'axe d'axisymétrie (voir figure 3.2). Plusieurs critères de maillage adaptatif sont utilisés pour décrire finement l'interface liquide/gaz, la courbure de l'interface et la vorticité à l'intérieur du ligament (un fichier de paramètre *Gerris* est présenté en annexe pour plus de détails). Le niveau de raffinement maximal est égal à 9, et chacune des boîtes de simulation est de longueur 5. La plus petite maille de nos simulations a donc une longueur de  $5/2^9$ . Les simulations durent à peu près une journée selon les cas (les simulations sont plus longues en cas de non-segmentation).

### Cas non visqueux

Nous trouvons dans la littérature, de nombreuses simulations numériques sur la rétractation capillaire. Nous avons choisi ici pour les comparaisons, dans le cas non visqueux ( $Oh = 0$ ), les résultats numériques de Schulkes [58] (1996), pour sa description temporelle de l'interface du ligament jusqu'à sa segmentation (voir [58], figure 9). La figure 3.3 montre la comparaison avec nos simulations, une séquence temporelle de la rétractation capillaire pour  $Oh = 0$ . La couleur symbolise la vorticité à l'intérieur du ligament. Cette vorticité (dans ce cas où la viscosité est nulle) est purement numérique. La convergence numérique a été prouvée pour le cas  $Oh = 0.001$ , pour différents maillages.

Les interfaces de Schulkes sont tracées par dessus les nôtres en pointillés. En conformité avec les résultats dans la littérature [58, 40], dans le cas d'écoulement potentiel, nous avons observé que la formation du cou (voir la section "anatomie du bourrelet" du chapitre 1) conduit inévitablement à l'étranglement du ligament. Notons que les calculs de Schulkes [58] ont été réalisés pour un ligament semi-fini de longueur  $L = 15R$ , suffisamment long pour segmenter selon [40].

### Cas visqueux : phénomène d'évitement de l'étranglement

Les résultats pour  $Oh = 0.01$  sont présentés sur la figure 3.4. À gauche, une séquence temporelle de l'interface, la couleur ici décrit l'intensité de la vorticité. Comme dans le cas non visqueux, le bourrelet se forme et nous observons la création du cou et la réduction de son rayon due à la capillarité. Ensuite nous assistons à l'apparition d'une fine couche de vorticité dans la région du cou qui s'enroule sur elle même pour

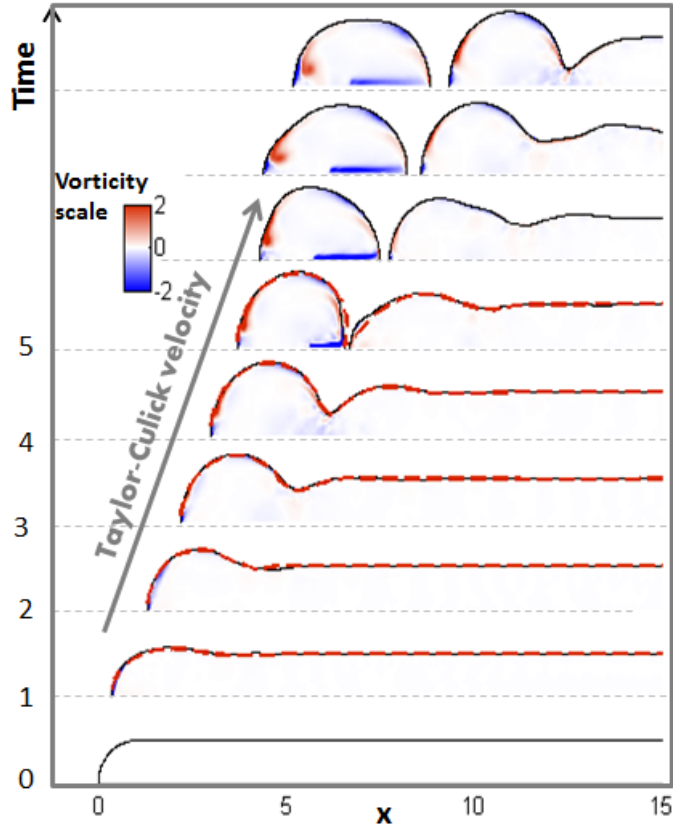


FIGURE 3.3 – Simulation numérique de la rétractation d'un ligament non visqueux. Position de l'interface dans le repère spatio-temporel. Les interfaces obtenues par Schulkes [58] sont tracées ici en pointillés en couleur rouge.

se détacher finalement sous forme d'un jet avec un anneau tourbillonnaire. Une inspection détaillée de ce détachement d'anneau tourbillonnaire montre qu'il coïncide avec la réouverture du cou du ligament. Ce lâcher tourbillonnaire va modifier fortement l'écoulement à travers la région de la segmentation, provoquant une réouverture de son cou : la segmentation est donc évitée.

Une comparaison avec le cas non visqueux de Schulkes [58] (ici en pointillés en couleur noir) montre clairement qu'avant l'évitement, le ligament se rétracte exactement de la même manière que le cas non visqueux à la seule différence qu'on a un évitement (lorsque  $Oh = 0.01$ ) à la place d'une segmentation ( $Oh = 0$ ). Le temps de la segmentation ( $Oh = 0$ ) ou de l'évitement ( $Oh = 0.01$ ) est à peu près  $t_s = 4.8 \approx 5$ .

Sur les sous-figures 3.4, **b**) & **(c)**, nous avons représenté la séquence temporelle de l'interface, la pression axiale et la vitesse axiale dans la région de segmentation du ligament juste avant (figure 3.4, **b**)) et après (figure 3.4, **c**)) l'évitement. Ce que

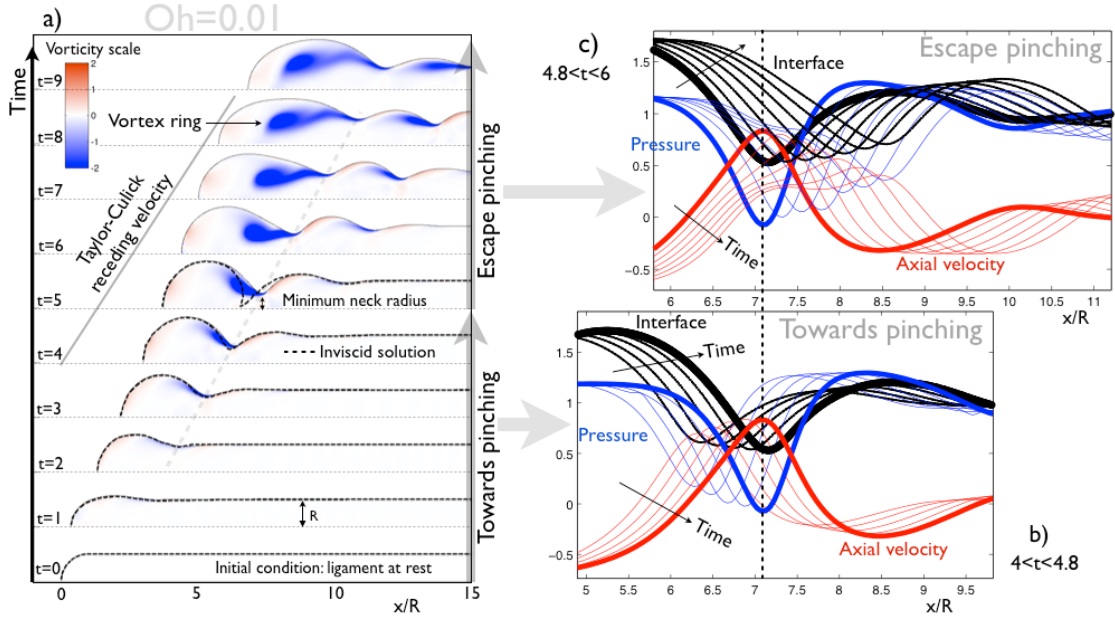


FIGURE 3.4 – Simulation numérique de la rétraction d'un ligament visqueux ( $Oh = 0.01$ ). **a)** : position de l'interface dans le repère spatio-temporel en trait continu, en pointillés les données de Schulkes (1996). Évolution de l'interface, la pression et la vitesse au niveau du cou lors de la segmentation **b)** et de l'évitement **c)**.

l'on observe avant l'évitement, c'est un écoulement Venturi : accélération de la vitesse (respectivement diminution de la pression) au niveau du cou, puis décélération de la vitesse (respectivement une surpression) loin du confinement. À  $t = 4.8$  le cou du ligament connaît sa plus grande vitesse axiale correspondant à sa faible valeur de pression : c'est le début de l'évitement et la création de l'anneau tourbillonnaire. Sur la figure 3.4, **c)**, on peut remarquer le profil particulier de la vitesse axiale qui diminue temporellement mais avec un maximum avant la zone de confinement : cela indique une accélération de fluide du cylindre liquide vers le bourrelet. C'est donc ce retour de fluide qui est responsable de la réouverture du cou.

En augmentant le nombre d'Ohnesorge, nous avons observé que ce phénomène d'évitement pouvait se répéter plusieurs fois (voir figures 3.5 & 3.10). Dans le cas  $Oh = 0.01$ , après l'évitement à  $t = 4.8$ , le ligament continue à se rétracter pour se segmenter à environ  $t = 11$ . Le cas  $Oh = 0.02$ , va subir deux évitements successifs avant sa segmentation. Pour  $Oh = 0.05$  nous avons observé quatre évitements successifs et sans segmentation (figure 3.10). Sur la figure 3.10 nous avons tracé l'évolution du rayon du cou du ligament lors de sa rétraction pour différents nombres d'Ohnesorge. Rappelons que dans le cas non visqueux ( $Oh = 0$ ), la formation du cou conduit irrémédiablement à l'étranglement du ligament : le rayon du cou décroît au cours du temps pour se

segmenter à environ  $t_s = 4.8$ . Dans le cas visqueux ( $Oh = 0.01$  par exemple), le rayon du cou décroît temporellement jusqu'à  $t = 4.8$ , puis réouvre après l'évitement : le rayon passe alors par un minimum puis grandit jusqu'à environ  $t = 8$ , et recommence à décroître pour se segmenter à  $t = 11$ . L'évitement se traduit alors sur la figure 3.10 par le passage du rayon du cou, dans son évolution temporelle, par un minimum local, et la segmentation par un rayon nul.

Une question s'impose alors à nous : nous avons montré que le cas non visqueux ( $Oh = 0$ ) se segmente directement et que le cas  $Oh = 0.01$  subit un évitement. Quelle est donc la valeur critique du nombre d'Ohnesorge au delà de laquelle se produit ce phénomène d'évitement ?

Une série de simulations pour une douzaine de valeurs de  $Oh$  nous révélera que cette valeur critique est environ  $Oh_c \approx 0.0025$ . Cette valeur d'Ohnesorge correspond exactement à la valeur que recherchait Schulkes (1996) comme étant la valeur critique en dessous de laquelle la segmentation du ligament serait régie par le phénomène du *end-pinching*, qu'il nommait  $Oh^*$  :

"The foregoing suggests that the critical Ohnesorge number lies in the range  $5 * 10^{-3} < Oh^* < 10^{-2}$ . It is difficult to be more precise about the value of  $Oh$  since a slow-down in the contraction rate of the neck is not a guarantee that the neck will not continue to contract. A clear sign of a steady neck radius (as in the case with  $Oh = 0.01$ ) is not always obtained. It is interesting to look at experimental evidence which may support our belief that there is a critical Ohnesorge number below which end-pinching occurs". Schulkes (1996).

Compte tenu de son modèle numérique (éléments finis) et surtout de la taille de ses mailles, Schulkes (1996) avait sous-estimé le domaine d'Ohnesorge auquel appartient cette valeur critique :  $5 * 10^{-3} < Oh^* < 10^{-2}$ .

Plusieurs études ont été menées au fil des années sur la rétractation capillaire. Mais l'évitement est un mécanisme étonnant, qui n'a pas été décrit dans la littérature malgré les observations de Schulkes [58] en 1996 ou de Notz [40] en 2004. Des données expérimentales sur ce phénomène n'ont jamais été publiées. Dans la section suivante je présente des expériences (faites par Jérôme Hoepffner) très faciles à réaliser qui montrent clairement ce mécanisme. Notons que nos premières observations sur l'évitement ont été numériques, il est donc important de réaliser des expériences pour valider ces observations.

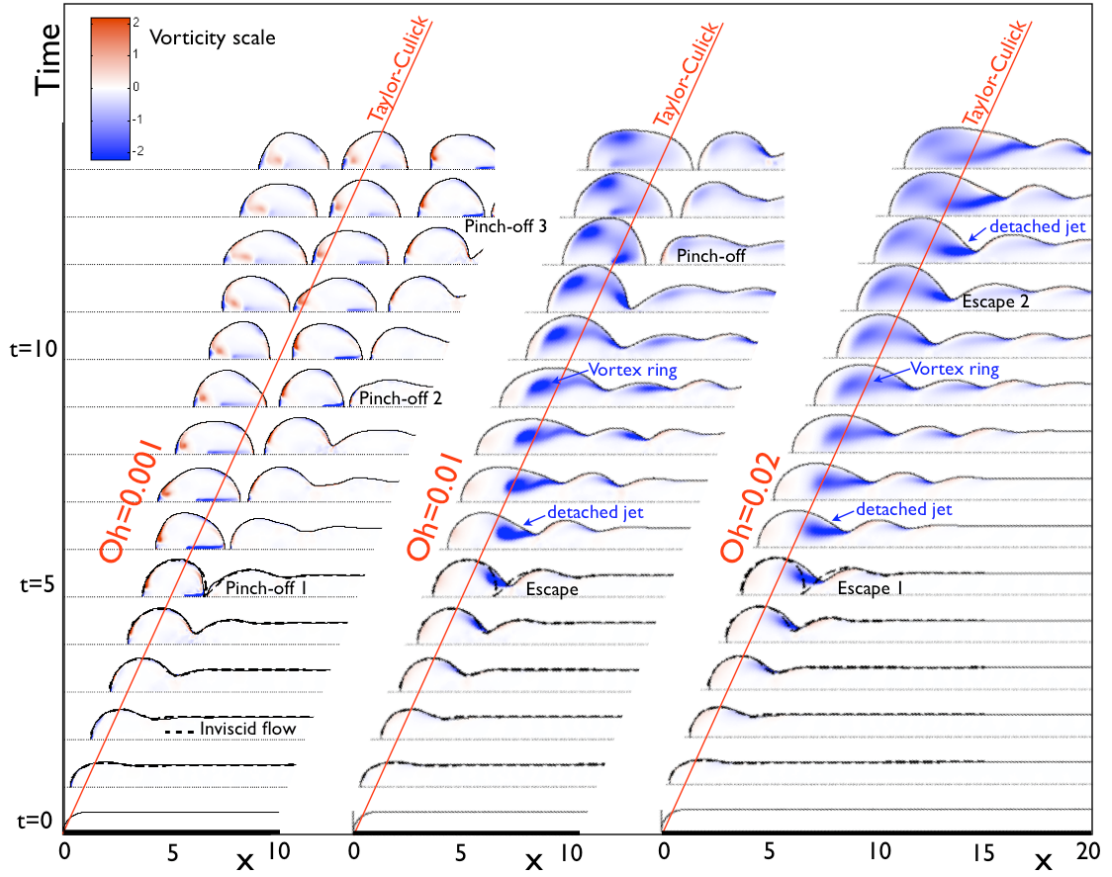


FIGURE 3.5 – Simulation numérique de la rétraction de ligaments semi-infinis, évitement successifs lorsqu'on augmente  $Oh$ . Un évitement puis segmentation pour  $Oh = 0.001$ , deux évitements successifs puis segmentation pour  $Oh = 0.01$ , ainsi de suite.

### 3.3 Nos expériences sur l'évitement

L'expérience consiste à tremper une paille d'environ  $8\text{mm}$  de diamètre dans un bain liquide (de l'eau colorée dans notre cas) et la retirer en maintenant l'ouverture supérieure bouchée avec un doigt. Une fois sortie du bain, on s'aperçoit qu'il reste un volume liquide piégé dans la paille : celui-ci se retrouve en situation d'instabilité de Rayleigh-Taylor [49], mais seulement stabilisé par la tension de surface, étant donné le diamètre assez petit de la paille. Une fois lâchée l'ouverture supérieure, ce volume liquide tombe sous forme d'une colonne liquide en chute libre. On filme alors cette chute à l'aide d'une caméra rapide.

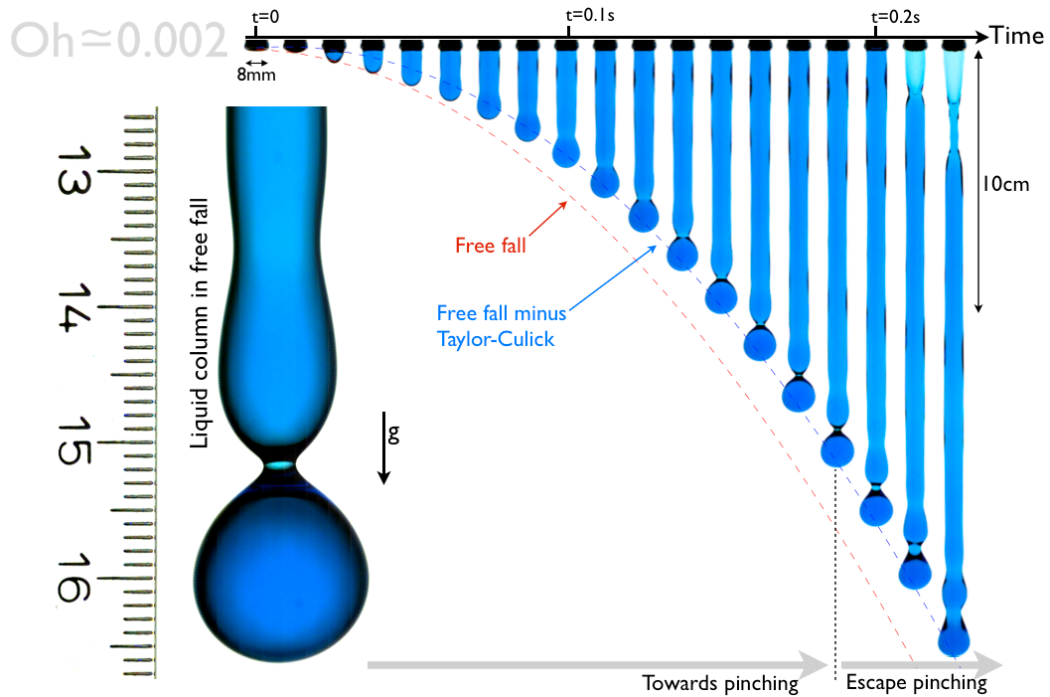


FIGURE 3.6 – Expérience sur le phénomène d'évitement : une colonne liquide contenue préalablement dans une paille est lâchée en chute libre. Celle-ci se rétracte pendant sa chute libre, un cou se forme et tend à segmenter la colonne en deux. Brusquement le cou se réouvre et l'étranglement est évité

La figure 3.6 montre une séquence temporelle représentative de cette chute. En haut de l'image, le bout de la paille de  $8\text{mm}$  de diamètre. La position du bourrelet est comparée au cas de chute sans rétractation, c'est à dire une tension de surface nulle (nommée *free fall* sur la figure). On voit bien que la vitesse de la colonne liquide est un peu plus faible que le cas *free fall*. L'explication est simple : l'interface libre de la colonne liquide, soumise à la tension de surface, va se rétracter pendant sa chute, et le



bourrelet formé atteint rapidement la vitesse de Taylor-Culick [12], donc la vitesse de chute de la colonne liquide est celle du *free fall*, diminuée de la vitesse de Taylor-Culick.

Dans cette expérience où la température ambiante est environ 20 degré celsius, le nombre d'Ohnesorge est environ  $Oh \approx 0.002$ . On a ( $\sigma \approx 72mJ.m^{-2}$ ,  $\rho \approx 999kg.m^{-3}$ ,  $\mu \approx 0.95mPas$ ). Pour s'assurer que la résistance de l'air n'influe pas sur la dynamique du ligament nous évaluons le nombre de Weber qui correspond au rapport des forces d'inertie et la tension superficielle :  $We = \rho U^2 R / \sigma$ . Celui-ci est très faible (de l'ordre de 0.5) pour influencer sur la rétractation, avec  $R = 4mm$ ,  $U \approx 3m/s$ . Notons qu'à ce Weber les gouttes de pluies restent sphériques. Le phénomène d'évitement se produit ici (figure 3.6), un peu avant  $t = 0.2s$  : le cou du bourrelet se réouvre et l'étranglement est évité.

### Qu'en est-il alors du lâcher d'anneau tourbillonnaire observé dans nos simulations ?

Nous avons montré dans nos simulations que le phénomène d'évitement a toujours coïncidé avec un lâcher tourbillonnaire à l'intérieur du bourrelet. Pour visualiser l'anneau tourbillonnaire à l'intérieur de la colonne liquide, l'expérience a été refaite dans les mêmes conditions que précédemment, mais avec de l'eau claire mélangée avec de petites particules sombres (il s'agit ici de poudre de chocolat de la taille du micromètre) servant de traceurs. Nous filmons la chute à la caméra rapide et ensuite à l'aide du logiciel *ImageJ*, nous superposons plusieurs images correspondant à des temps différents de la chute au moment de l'évitement. Ensuite les images sont translatées dans le même référentiel spatial. Le résultat obtenu est présenté sur la figure 3.7, **a**) et montre clairement que les traceurs décrivent un anneau tourbillonnaire à l'intérieur du ligament dans la région du cou.

#### 3.3.1 Comportement de l'écoulement à travers le cou du ligament lors de sa segmentation ou de son évitement

Des expériences ont été réalisées (par Jérôme Hoepffner) pour observer le comportement du jet à l'intérieur du ligament lors de sa segmentation ou de son évitement. Pour réaliser ces expériences, une procédure a été élaborée pour assembler la colonne liquide en un mélange stratifié d'eau claire et d'eau colorée. Le mélange stratifié est obtenu comme suit : on prépare d'un côté un demi-litre d'eau du robinet mélangée avec 100 grammes de sel de table, et d'un autre côté un demi-litre d'eau du robinet mélangée avec du colorant alimentaire (bleu dans notre cas). Le sel rend l'eau du ro-

binet légèrement plus dense, ce qui est très utile pour empêcher le mélange des deux solutions (eau claire salée, eau colorée) pendant la manipulation et de maintenir ainsi le front de l'interface (eau claire/eau colorée) plat pendant toute l'expérience. La paille de  $8\text{mm}$  de diamètre interne est d'abord plongée dans l'eau colorée jusqu'à une hauteur  $h = 6\text{cm}$ . On la sort, en maintenant l'ouverture supérieure bouchée avec un doigt. On la replonge ensuite dans l'eau salée pour la même hauteur  $h$  : l'eau colorée (dans la paille) et l'eau salée (à l'extérieur de la paille) ont même hauteur, c'est une situation stationnaire, ainsi le front du colorant ne bouge pas. C'est alors qu'on enfonce la paille d'une hauteur de  $l = 2.5\text{cm}$  de plus pour aspirer de l'eau salée, l'ouverture supérieure laissée ouverte pendant cette manipulation. Le résultat est un mélange stratifié de  $6\text{cm}$  d'eau colorée et de  $2.5\text{cm}$  d'eau salée dans la paille que l'on ressort du bain (toujours l'ouverture supérieure maintenue bouchée). Le mélange étant préparé, la paille sera fixée devant la caméra, l'ouverture supérieure lâchée puis la chute libre de la colonne liquide du mélange stratifié sera filmée. Il est important de respecter ce dosage eau colorée/eau salée pour obtenir lors de la chute, le front du colorant au niveau de la zone de l'étranglement. Notons qu'il est plus pratique de maintenir la paille fixée devant la caméra et de déplacer les solutions d'eau colorée et d'eau salée pendant les phases de préparation du mélange. Pour varier progressivement le nombre d'Ohnesorge du mélange, une quantité adéquate d'éthanol (eau  $\sigma = 72\text{mJ/m}^2$ , ethanol  $\sigma = 22\text{mJ/m}^2$  à  $20^\circ\text{C}$ ) sera ajoutée dans les mélanges.

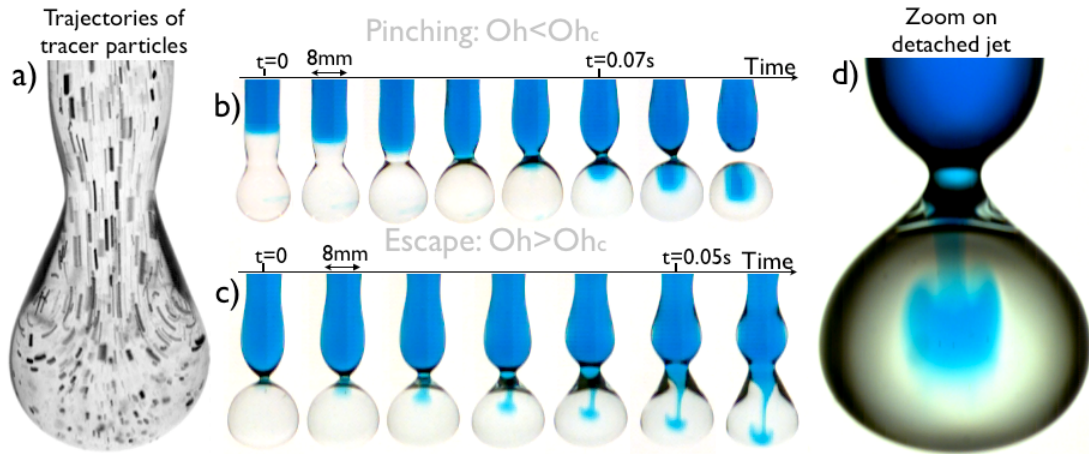


FIGURE 3.7 – Observation expérimentale de l'anneau tourbillonnaire lors de l'évitement. **a)** trajectoire des particules après évitement, formation d'anneau tourbillonnaire. **b)** Pour  $Oh$  inférieur à  $Oh_c$ , pas de détachement de jet. **c)** Pour  $Oh$  supérieur à  $Oh_c$ , un détachement du jet avec création d'anneaux tourbillonnaires. **d)** : zoom sur la zone de l'étranglement lors du mécanisme de l'évitement.

La figure 3.7, **(b)** montre le cas d'un Ohnesorge inférieur à la valeur critique  $Oh_c$ . Le front du colorant se déplace progressivement vers la zone de l'étranglement en formant une sorte de bouchon. Une partie du colorant se retrouvera dans la goutte qui en résulte. Le cas de l'évitement est bien différent. La figure 3.7, **(c)** montre le cas où le nombre d'Ohnesorge est supérieur à  $Oh_c$ . On voit clairement un jet du front du colorant à l'intérieur du bourrelet, ainsi que les caractéristiques de la création d'un anneau tourbillonnaire en aval de la zone de l'étranglement. L'utilisation du sel, du colorant et de l'éthanol rend difficile la précision de la valeur de la viscosité et de la tension de surface pour les mélanges. Pour le cas de l'évitement sur la figure 3.7, l'eau colorée est à :

$Oh \approx 0.0048$  ( $\sigma = 40mJ/m^2$ ,  $\rho \approx 970kg/m^3$ ,  $\mu \approx 4.8mPas$ ) et l'eau salée à  $Oh \approx 0.0058$  ( $\sigma = 37mJ/m^2$ ,  $\rho \approx 1068kg/m^3$ ,  $\mu \approx 4.8mPas$ ).

Les observations présentées jusque là, ne concernent que des ligaments non visqueux ou très peu visqueux ( $Oh < 0.02$ ). Que se passe-t-il alors lorsque le ligament est visqueux ?

### 3.4 Cas des ligaments visqueux : théorie linéaire

Très récemment Driessen et al. [14] (2013) ont développé une théorie linéaire pour expliquer la segmentation des ligaments longs et visqueux. Cette théorie est basée sur l'analyse linéaire de stabilité développée par Weber [66] (1931). L'hypothèse de base est la suivante : le destin d'un ligament liquide résulte de la compétition entre le temps que prend l'instabilité de Rayleigh-Plateau pour segmenter ( $T_{inst}$ ) et le temps que prend le ligament pour se rétracter ( $T_{rec}$ ) en une seule goutte (par évitement d'une certaine manière). Si le temps que met le ligament pour se rétracter en une goutte est supérieur à celui de la capillarité, alors le ligament se segmente par Rayleigh-Plateau.

Considérons un ligament cylindrique soumis à l'instabilité de Rayleigh-Plateau, l'évolution spatio-temporelle de son rayon local lorsque ce ligament est initialement perturbé par une onde d'amplitude initiale  $\delta$  s'écrit :

$$r(x, t) = R + \delta \exp(\omega t) \cos(kx/R)$$

avec  $k = 2\pi R/\lambda$  le nombre d'onde,  $\lambda$  la longueur d'onde de perturbation. Notons par  $\hat{R} = \delta \exp(\omega t)$ , l'amplitude de l'onde de perturbation en fonction du temps. Le taux de croissance  $\omega$  de l'onde de perturbation (voir Weber [66]), s'écrit :

$$\omega t_{cap} = \sqrt{\frac{1}{2}(k^2 - k^4) + \frac{9}{4}Oh^2k^4 - \frac{3}{2}Ohk^2} \quad (3.1)$$

avec  $t_{cap} = \sqrt{\rho R^3 / \sigma}$  le temps capillaire. De cette formule on peut déduire le nombre d'onde le plus instable de l'instabilité de Rayleigh-Plateau :

$$k_{max} = \frac{1}{\sqrt{2 + 3\sqrt{2}Oh}}$$

Le taux de croissance maximale  $\omega_{max}$  correspondant à  $k_{max}$  est donc fonction du seul paramètre  $Oh$ . On peut donc exprimer le temps nécessaire pour l'instabilité de Rayleigh-Plateau pour segmenter le ligament, qui correspond au temps nécessaire pour l'amplitude de perturbation d'atteindre le rayon du ligament, soit  $\hat{R} = R$  :

$$T_{inst} = \log(R/|\delta|)/\omega_{max} \quad (3.2)$$

où  $\omega_{max}$  est le taux de croissance de l'onde le plus instable.  $T_{inst}$  est donc fonction de l'amplitude initiale de perturbation et de  $Oh$ .

En considérant que dans le cas de la rétractation en une seule goutte, le bourrelet de taille  $2R_g$  parcourt la moitié de la longueur du ligament, à la vitesse de Taylor-Culick, on peut exprimer le temps de rétractation en une goutte  $T_{rec}$  [14] :

$$T_{rec} = \frac{L/2 - 2R_g}{\sqrt{\sigma/\rho R}} = T_{cap} [\Gamma - (6\Gamma)^{1/3}], \quad (3.3)$$

avec  $\Gamma = L/2R$  le rapport d'aspect du ligament. En égalant ces deux temps  $T_{rec} = T_{inst}$ , on déduit le rapport d'aspect critique  $\Gamma_c$  [14] en fonction du nombre d'Ohnesorge du ligament, au delà de laquelle le ligament va se segmenter par Rayleigh-Plateau :

$$\frac{\log(\delta)}{t_{cap}\omega_{max}} + (6\Gamma_c)^{1/3} + \Gamma_c = 0. \quad (3.4)$$

La courbe représentant cette valeur critique du rapport d'aspect en fonction du nombre d'Ohnesorge est tracée sur la figure 3.9, et nommée *Linear stability*. Comme le montre le graphique 3.9, cette théorie linéaire, pour  $\delta = 0.01$ , prédit bien la frontière obtenue par les données expérimentales de Castreón-Pitta, lorsque  $Oh > 0.1$ .

Cette description va dans le même sens que ce que nous avons observé : sous l'hypothèse d'une amplitude de perturbation initiale supérieure à 1% du rayon du ligament, elle prédit pour un rapport d'aspect donné, l'existence d'une valeur critique du nombre d'Ohnesorge au delà de laquelle le ligament ne se segmente pas. Cette description a l'avantage d'être conceptuellement simple, mais elle ne prend pas en compte les observations qu'on a décrit précédemment à savoir le lâcher tourbillonnaire en aval du cou du ligament. Nous imaginons alors une autre description pour expliquer le mécanisme de l'évitement en se basant sur l'idée du *end-pinching* de Stone et al. (1986).

### 3.5 Analyse du mécanisme

Le mécanisme de l'évitement est illustré sur la figure 3.8, **2**, nous avons décrit le cas de la formation du bourrelet plus tôt dans le chapitre 1 (figure 3.8, **1**). Analysons maintenant le cas de l'évitement (3.8, **2**). L'idée principale est de se mettre dans le référentiel lié au cou du ligament lors de sa rétractation. En considérant uniquement la région de confinement (le cou) on se retrouve alors avec un cou fixe, et du flux des particules fluides à travers ce cou, avec la vitesse de Taylor-Culick. Considérons un écoulement inertiel à travers ce cou, la réduction du rayon de ce dernier induit une accélération de la vitesse axiale du cylindre liquide vers le bourrelet, qui correspond à la décroissance de la pression (voir 3.4, **2**). L'écoulement que nous décrivons n'est rien d'autre que le classique écoulement à travers un Venturi. Cette piste sera développée dans le chapitre prochain. Nous connaissons deux types de configurations pour cet écoulement : la situation où l'écoulement accélère au niveau du cou pour retrouver une pression plus élevée en aval du cou où il décélère, et la situation du jet, où l'accélération de l'écoulement au niveau du cou conduit à un jet vers le bourrelet avec une zone de recirculation. C'est la situation de perte de charge : l'écoulement ne décélère pas puisqu'il ne retrouvera pas sa pression élevée en aval du cou.

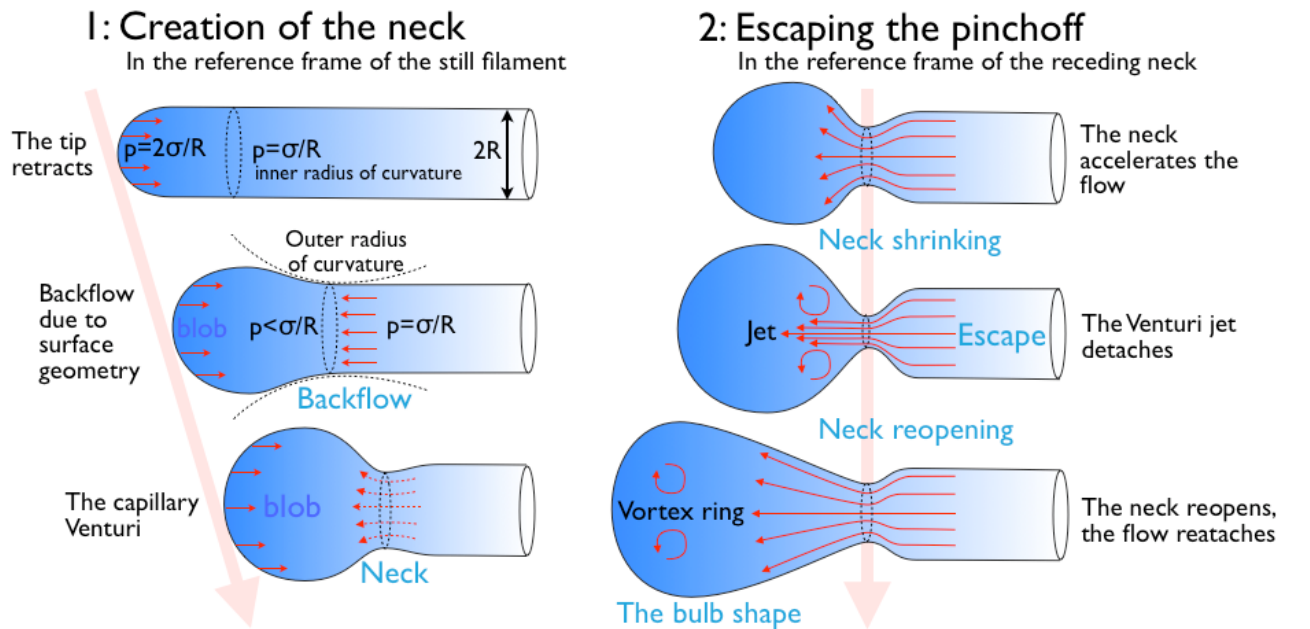


FIGURE 3.8 – Description schématique de la région de segmentation d'un ligament. **(1)** : description de la formation du bourrelet. **(2)** : description du mécanisme de l'évitement de l'étranglement.

De quel écoulement Venturi parle-t-on ? Il est important pour se fixer les idées de rappeler qu'il existe deux différences principales entre le classique écoulement du Venturi et l'écoulement que nous décrivons ici : écoulement à travers le cou d'un ligament que nous allons désormais nommer le Venturi capillaire. La première, les parois de notre Venturi ne sont pas solides comme le cas classique, l'écoulement accélère à travers le col d'une interface fragile qui se déforme en réponse à la variation de la pression à l'intérieur du ligament, d'où le nom de Venturi capillaire. La deuxième, l'écoulement dans notre cas n'est pas stationnaire : il y a initialement une accélération rapide de la vitesse à travers le cou avant d'atteindre le régime de Taylor-Culick et un rétrécissement progressif du cou du Venturi capillaire. L'écoulement du cylindre liquide vers le bourrelet provoque la formation progressive d'une couche limite visqueuse dans la région du cou du Venturi capillaire.

Le rétrécissement du cou se produit sur l'échelle de temps caractéristique capillaire  $t_{cap} = \sqrt{\rho R^3 / \sigma}$  (voir la comparaison entre les cas non visqueux et notre simulation du cas avec  $Oh = 0.01$  sur la figure 3.4, (a)). Tandis que la formation de la couche limite visqueuse au niveau du cou se produit sur une échelle de temps visqueuse  $t_{vis} = \rho R^2 / \mu$ . Le rapport de ces deux temps caractéristiques n'est rien d'autre que le nombre d'Ohnesorge ( $Oh = t_{cap} / t_{vis}$ ). L'augmentation du nombre d'Ohnesorge implique donc une augmentation rapide de la couche limite visqueuse de telle sorte que lorsque  $Oh \geq 0.0025$ , elle est assez grande pour induire le détachement du jet en direction du bourrelet, avant  $t \approx 5$ .

## 3.6 Segmentation de ligaments entiers

Maintenant que nous avons décrit le phénomène de l'évitement, nous allons maintenant nous en servir pour avoir une vue globale sur le mécanisme de la rétractation. Pour ce faire, nous reprenons les données les plus pertinentes de la littérature concernant les recherches sur la rétractation capillaire. Ces données numériques et expérimentales de la littérature sont résumées sur la figure 3.9 de Castrejón-Pita et al. (2012). Cet article est assez riche de part les contributions expérimentales mais aussi numériques sur la segmentation, depuis Schulkes (1996) en passant par Notz & Basaran (2004) et enfin Castrejón-Pita et al. [9] (2012).

La question principale est de prédire le destin d'un ligament liquide : va-t-il éviter ou bien se segmenter ?

Pour répondre à cette question Castrejón-Pita et al. ont réalisé une série d'expériences sur les ligaments en variant leurs longueurs et leurs viscosités. Sur le graphique

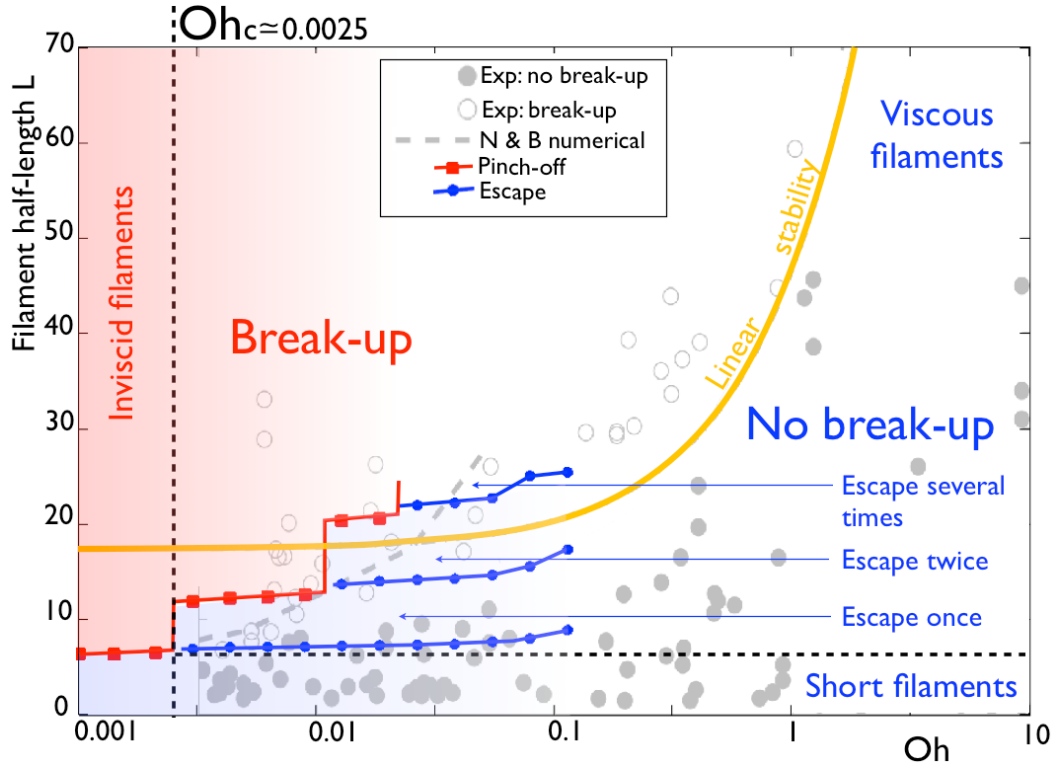


FIGURE 3.9 – Rapport d’aspect en fonction de  $Oh$  : les carrées rouges sont les points de segmentation, les points bleus, ceux de l’évitement qui résultent de nos simulations. Données numériques et expérimentales (en gris) de rétraction de ligaments par Castrejón-Pita (2012). La figure est celle de Driessen [14], qui est une reprise de Castrejón-Pita.

3.9, Castrejón-Pita [9] dresse la frontière entre le cas où le ligament se segmente et le cas de la non-segmentation. Pour un nombre d’Ohnesorge donné, le graphique 3.9 montre qu’il existe une valeur critique  $L_c$  du rapport d’aspect en dessous de laquelle il est impossible de segmenter (le ligament se rétracte en un seul volume). On s’aperçoit que cette valeur critique augmente avec le nombre d’Ohnesorge. En conséquence : la frontière entre le cas d’un ligament qui se segmente ou non est une courbe croissante. Autrement dit, plus le ligament est visqueux, plus il a besoin d’être long pour se segmenter.

Dans nos simulations nous avons considéré des cylindres liquides semi-infinis (assez longs pour se segmenter). Pour transposer nos résultats dans le repère de Castrejón-Pita nous devons supposer négligeables les effets qui peuvent survenir à la mi-longueur du ligament (dans le cas d’un cylindre entier), lorsque les bouts des deux demi-cylindres liquides se rencontrent. Les barres d’erreurs données par Castrejón-Pita entre les protocoles expérimentaux et numériques nous permettent cette hypothèse. L’objectif ici est

de pouvoir donner une structure à la frontière obtenue sur ce graphique entre les zones de segmentation et de non-segmentation. Nous nous attacherons ensuite à montrer que l'évitement est le mécanisme caché, responsable de l'augmentation de la longueur critique de segmentation du ligament  $L_c$ , lorsque le liquide devient visqueux. La transposition que nous avons adoptée pour être en mesure de faire cette comparaison est la suivante : si la demi-longueur initiale du ligament entier est inférieure à la longueur de recul qu'il faut à un ligament semi-infini pour se segmenter alors ce dernier ne se segmente pas. Si la demi-longueur initiale du ligament entier est juste égale à la longueur d'évitement du demi-cylindre alors il se rétracte en une sphère, après un seul évitement, et ainsi de suite.

Plusieurs simulations ont donc été faites pour différentes valeurs de  $Oh$  pour tracer le graphique 3.9. Les points de segmentations sont représentés sur le graphique par de petits carrés rouges, ces points correspondent au cas d'une décroissance du rayon du cou jusqu'à zéro. Ceux de l'évitement sont de petits points ronds bleus et correspondent au cas d'un passage par un minimum local du rayon du cou en temps (voir figure 3.10). Les petits cercles creux de couleur grise, représentent le cas de la segmentation directe en une ou plusieurs gouttes, tandis que les cercles pleins, représentent les cas de non segmentation (données expérimentales de Castrejón-Pita et al.).

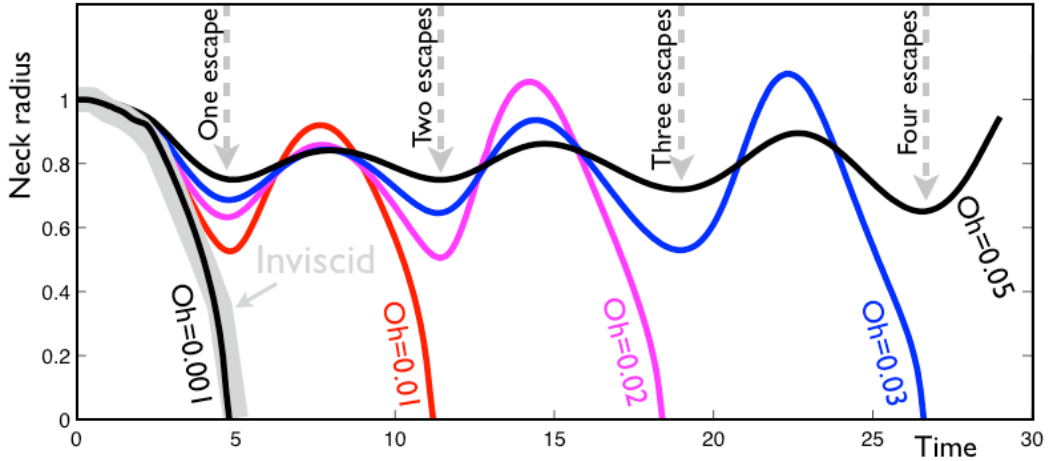


FIGURE 3.10 – Évolution temporelle du cou du ligament pour différents Ohnesorge. Pour  $Oh = 0.01$ , on a une segmentation directe comme le cas pour tous les ligaments non visqueux. Les données de Schulkes [58], pour  $Oh = 0$ , sont tracées en couleur grise. Le cas  $Oh = 0.01$  évite une fois puis se segmente, celui du  $Oh = 0.02$  va éviter deux fois avant de se segmenter, ainsi de suite.

Notz & Basaran [40] (2004), ont numériquement dressé la frontière critique de segmentation, celle ci est représentée sur la figure 3.9 en pointillé et en couleur grise ; ces



données viennent du tableau 3 de leur article. La frontière obtenue par nos simulations est en bon accord avec les résultats de la littérature. D'autre part, notre frontière présente des sauts : le premier saut arrive en  $Oh_c = 0.0025$ , le second lorsque  $Oh = 0.01$ . À partir de cette valeur ( $Oh > 0.01$ ) nous avons observé une succession d'évitements, jusqu'à 4 pour  $Oh = 0.05$  (voir figure 3.10).

### 3.6.1 Analyse du graphique 3.9

Pour faire simple nous le décomposons en trois régions pertinentes. La première région  $Oh \geq 1$ , est le régime *visqueux*, où le ligament ne peut se segmenter quel que soit son rapport d'aspect. En comparaison avec les études de Brenner [8] (1999), cette région est l'équivalente de la région (ii) :  $Re_f = \rho U_{cap} L / \mu = L > 1$ , et  $L_\nu / R = \mu^2 > 1$ . Il a été montré [8], que dans cette région, il n'y a pas de formation d'onde capillaire le long de la surface du ligament, pas de formation de cou et donc pas de segmentation. Nos simulations confirment également ces observations.

La région  $Oh \leq 0.0021$ , qualifiée de *non-visqueuse*. Le ligament se segmente une fois que sa longueur est supérieure à la longueur caractéristique  $L_c = 6.5R$ . Si la longueur du ligament  $L \leq 6.5R$ , alors pas de segmentation, le ligament est trop court et se rétracte en une seule goutte, quelque soit son  $Oh$  (voir Notz & Basaran [40]). La segmentation dans cette région est directe quel que soit le rapport d'aspect  $L > L_c$  du ligament.

Et la région de *l'évitement*  $0.003 \leq Oh \leq 1$ . Le ligament va éviter une ou plusieurs fois avant de se segmenter, ou non. Nous avons trouvé également un encadrement pour la valeur critique d'Ohnesorge pour l'évitement (qui se trouve entre  $0.0021 \leq Oh_c \leq 0.003$ ) au delà de laquelle se produit l'évitement, soit  $Oh \approx 0.0025$ . Les régions où le ligament évite une fois, deux fois ou plusieurs fois sont également ajoutées au graphique pour donner plus de lisibilité à la structure de la frontière. On peut observer jusqu'à quatre évitements successifs. Pour ces valeurs d'Ohnesorge, l'évitement est moins violent, avec une accumulation de la couche de vorticité qui se diffuse à la place d'un vrai lâcher d'anneau tourbillonnaire (voir figure 3.5).

Le mécanisme de l'évitement est donc valable pour la région de l'évitement ( $0.0021 \leq Oh \leq 0.1$ ). La région de ligaments non visqueux est très bien décrit par la littérature et nos comparaisons montrent un très bon accord. Nous n'avons pas fini nos calculs quant aux nombres d'Ohnesorge supérieurs à 0.1 (les temps de calculs deviennent trop longs). Mais les résultats de Driessen et al. (2013) sont en bon accord avec la théorie linéaire et également les expériences de Castrejón-Pita [9]. La courbe de cette analyse est représentée en ligne orange sur la figure 3.9. Bien sûr, cette courbe dépend

de l'amplitude de l'onde initiale de perturbation comme le montre l'analyse linéaire (voir le paragraphe "Cas des ligaments longs et visqueux"). La valeur de  $0.01R$  comme amplitude initiale donne une bonne approximation de la frontière expérimentale pour  $Oh > 0.1$ .

### 3.7 Cas des ligaments courts

Nous avons montré, dans la section précédente, que le phénomène d'évitement est le mécanisme responsable de la structure de la frontière de Castrejón-Pita [9]. Mais rappelons que les comparaisons de nos simulations avec les résultats Castrejón-Pita ont été possibles grâce à notre hypothèse sur le fait que : lorsque le ligament entier est assez long (de longueur  $L_o$ ), sa rétractation est exactement la même que celle d'un demi-ligament de longueur  $L_o/2$ . Cette hypothèse est assez correcte, car la seule différence avec le ligament entier est qu'il a deux bouts. Si la distance entre ces deux bouts est assez grande on peut considérer alors qu'ils n'interagissent pas lors de la rétractation. Mais à partir de quelle valeur de  $L_o$  pourrait-on considérer le ligament comme étant assez long ?

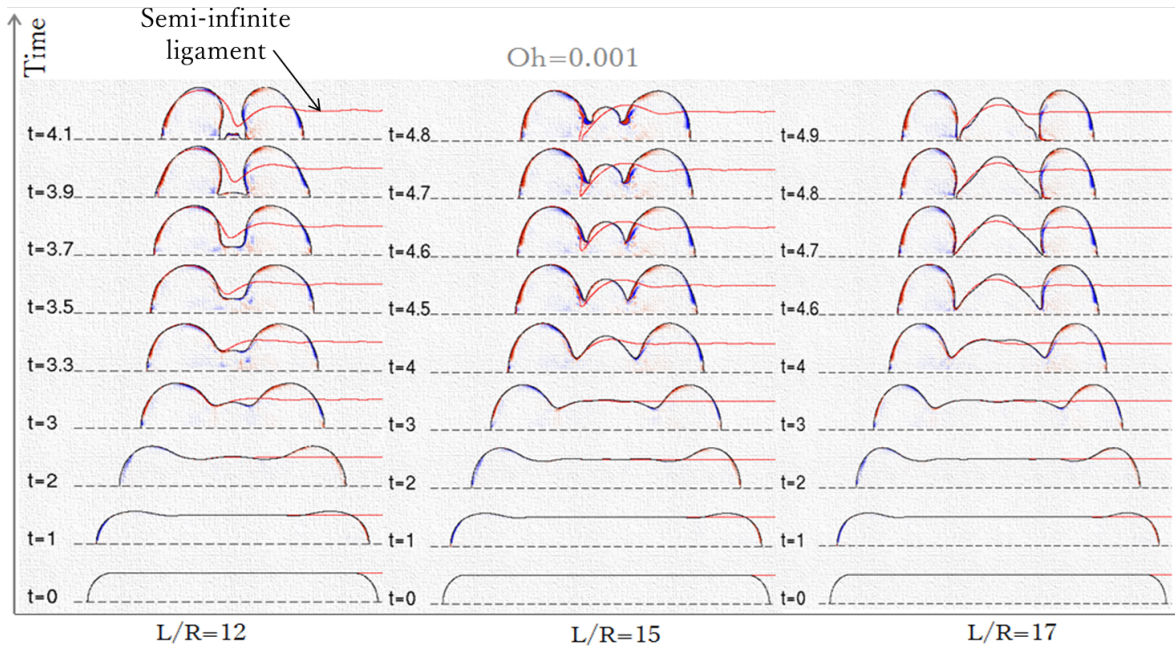


FIGURE 3.11 – Comparaison entre le ligament entier de rapport d'aspect  $L_o/R$  et le ligament semi-infini ( $L = 47.5R$ ) lorsque  $L_o/R$  est petit.

Dans ce paragraphe nous présentons une série de simulations pour trouver la valeur critique de  $L_o/R$  à partir de laquelle notre hypothèse est valable. Nous savons par la

figure 3.9 qu'il existe une longueur critique  $L_c$  en dessous de laquelle il est impossible de segmenter, quelque soit la valeur du nombre d'Ohnesorge. Cette valeur critique Notz & Basaran [40] l'avaient évaluée à  $5.5 \pm 0.5$ . Nous avons trouvé (d'après nos simulations sur les ligaments semi-infinis) un rapport d'aspect critique proche de cette valeur :  $L/R = 6.33$ . Cette valeur correspond en effet à la longueur à laquelle notre ligament semi-infini se segmente dans le cas non visqueux ( $Oh = 0$ ). Ce qui veut dire d'après notre hypothèse que la longueur critique de segmentation du ligament entier est autour de  $12 \pm 1$ . La figure 3.11 montre la comparaison de la rétractation de deux cas : le ligament semi-infini dont l'interface est tracée en rouge et celui du ligament entier pour différents rapport d'aspect  $L_o/R = 12, 15, 17$ . Le cas du ligament entier pour  $L_o = 12$  se segmente à  $t = 4.1$  (voir figure 3.11). Ce qui confirme la valeur critique de segmentation. Le cas  $L_o = 13$  (non présenté sur la figure) va également se segmenter, mais à  $t = 4.5$ . On pourrait croire alors que notre hypothèse reste valable pour les ligaments courts et que le rapport d'aspect critique de segmentation du ligament entier est  $L_o/R = 12$ . Et alors dans ce cas, tous ligaments (à  $Oh = 0$ ) de rapport d'aspect supérieur à 12 vont se segmenter. Mais ce n'est pas le cas, parce que le cas  $L_o = 15$  ne se segmente pas.

En fait si on regarde la comparaison avec les rapports d'aspects  $L_o/R = 12$  à 15, les deux ligaments ne se comportent pas de la même manière. On peut bien voir que les ondes capillaires générées par les deux bouts du ligament entier sont assez proches pour interagir. Jusqu'à environ  $t = 3$  les deux interfaces (ligament entier et ligament semi-infini) sont exactement les mêmes (figure 3.11, les deux premières colonnes). À partir de  $t = 3.3$ , les deux bourrelets sont assez proches l'un de l'autre, c'est en ce moment là qu'on observe un décalage entre les deux interfaces. On n'est donc pas dans la zone de validité de notre hypothèse. En plus notons que dans les cas  $L_o = 12, 13$  le ligament entier segmente plus tôt que le ligament semi-infini dont le temps de segmentation est environ  $t = 4.8$ .

Le fait que l'augmentation du rapport d'aspect  $L_o/R$  de 12 à 13 fait passer le temps de segmentation de 4.1 à 4.5, peut nous inciter à croire que, lorsque le temps de segmentation du ligament entier sera le même que celui du ligament semi-infini, les deux ligaments se rétracteront de la même manière. Ce qui est le cas pour  $L_o/R = 17$  (figure 3.11, dernière colonne). Dans ce cas les temps de segmentation sont exactement les mêmes,  $t = 4.8$ . On peut quand même noter un léger décalage entre les deux interfaces, dû à la masse liquide entre deux bourrelets, mais cette influence est finalement négligeable (voir la comparaison des interfaces des deux ligaments). Ainsi les ligaments entiers de rapports d'aspect  $L_o/R \geq 17$  vont se segmenter exactement comme nos li-

gaments semi-infinis. On peut donc conclure sur la longueur critique du ligament au dessus de laquelle notre hypothèse est valable qui est  $L_{oc}/R = 17$ . Pour confirmation la figure 3.12 montre la comparaison du rayon du cou du ligament entier (nommé *complete ligament*) et du ligament semi-infini (*semi-infinite ligament*) pour deux valeurs d'Ohnesorge. On a un très bon accord pour le cas de segmentation directe  $Oh = 0.001$ . On note un petit décalage des interface dans le cas de l'évitement,  $Oh = 0.01$ , mais les deux courbes ont le même minimum local, le même temps d'évitement.

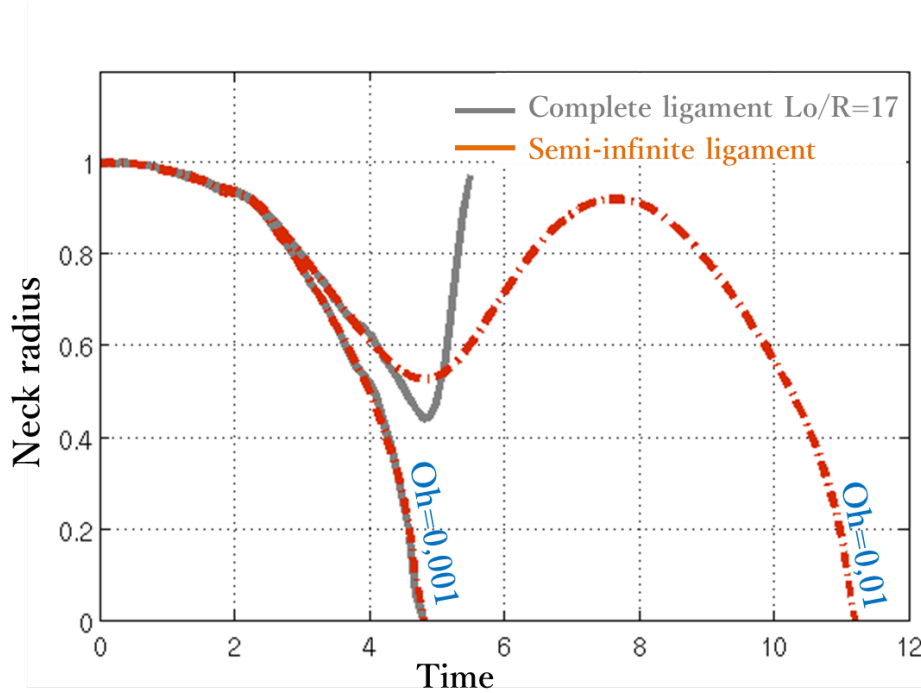


FIGURE 3.12 – Comparaison du rayon du cou du le ligament entier de longueur  $L_o/R = 17$  et du ligament semi-infini de longueur  $L = 47.5R$ .

Lorsque  $12 \leq L_{oc}/R < 17$  la segmentation du ligament entier serait donc régie par la dynamique complexe de l'interaction entre les deux bourrelets du ligament. Lorsque la masse liquide entre les deux bourrelets est assez petite on a une segmentation (c'est le cas pour  $L_{oc}/R = 12$  &  $13$ ), dans le cas contraire on a un évitement (le cas  $L_{oc}/R = 15$ ). Ceci reste une interprétation de ce que nous avons observé de ces simulations, mais nous n'avons pas fait d'études quantitatives pour aller plus loin.

### 3.8 Taille des gouttes par l'évitement

Bien évidemment, le fait que les ligaments de même longueur n'ont pas le même temps de segmentation explique la différence entre la distribution des gouttes issues de

leurs segmentations. Plus le temps de segmentation est long, plus la goutte résultante de la segmentation est volumineuse : le bourrelet a plus de temps pour avaler de la masse liquide avant de se segmenter. La figure 3.13 montre le volume de la goutte issue de segmentation immédiate ou après évitement en fonction du volume de goutte (théorique) qui résulterait de la segmentation d'un ligament se rétractant à la vitesse de Taylor-Culick. On remarque que les gouttes issues de nos simulations ont un volume légèrement supérieur à celles qui résulteraient d'une segmentation de ligament se rétractant à la vitesse de Taylor-Culick. Ceci est surprenant et reste encore moins clair pour nous jusque là.

Dans le régime non visqueux, le temps de segmentation est à peu près le même,  $t = 4.8$  pour tous les ligaments, ce qui explique que les gouttes qui en résultent ont la même taille. La tendance est plutôt générale, c'est à dire que les ligaments qui évitent exactement  $n$  fois font des gouttes quasiment de même taille. Les gouttes formées par les ligaments qui évitent une fois font deux fois la taille de celles issues des segmentations directes ( $Oh < 2.5e - 3$ ). On y compte jusqu'à un facteur 4.6 entre le cas non visqueux et le cas  $Oh = 0.03$ .

## 3.9 Généralité du phénomène d'évitement

Nous avons présenté un phénomène étonnant qui est l'évitement de l'étranglement qui survient lors de la rétraction d'un ligament cylindrique lorsque  $Oh > 0.0025$ . Ce phénomène est-il seulement limité au cas de la rétraction des ligaments cylindriques ?

### 3.9.1 Cas du jet de fluide impulsif

Sur la figure 3.14, nous décrivons deux autres expériences différentes de la rétraction du ligament qui montrent un caractère général du phénomène d'évitement. La première, décrit le jet résultant de l'impact d'un tube rempli de liquide, sur un substrat solide (voir Antkowiak et al. [1], 2007). Si la surface du tube est semi-hydrophobe (angle de contact à 90 degré par silanisation du verre), la surface du liquide contenu dans le tube reste indéformable pendant la chute et même après l'impact. Dans le cas contraire, l'interface liquide/air, pendant la phase de chute libre du tube, se déforme par la tension de surface pour prendre une forme hémisphérique. Lors de l'impact ce ménisque se déforme et un jet se forme. Nous filmons ce jet avec une caméra rapide. La vitesse du jet résultant dépend de la puissance de l'impact du tube. Il y a deux phases dans ce jet, la phase d'impulsion où le jet s'élève avec une vitesse de front qui décroît en temps. Pendant cette phase, le ligament s'étire et segmente pour donner un train de

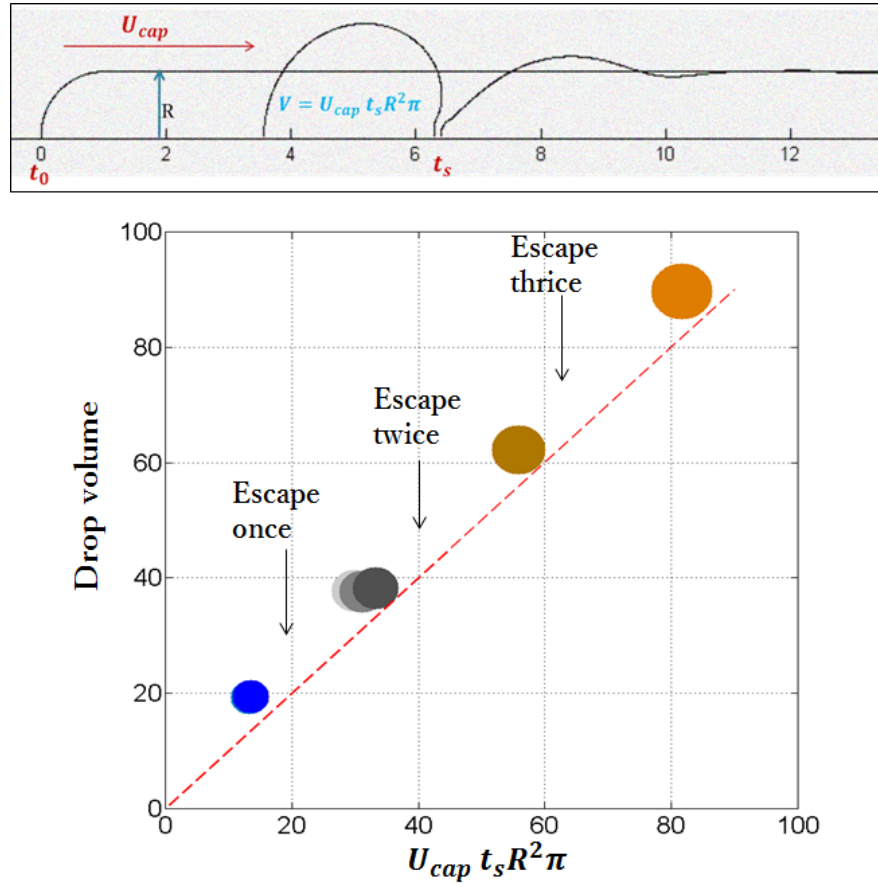


FIGURE 3.13 – Volume des gouttes résultant de la segmentation des ligaments pour différents nombres de Ohnesorge, par rapport au volume d'une goutte qui résulterait de la segmentation d'un ligament se rétractant à la vitesse de Taylor-Culick. Plus le ligament est visqueux, plus il évite de se segmenter et la goutte issue de la segmentation est plus volumineux.

gouttelettes. Puis la vitesse de front du jet tend à s'annuler, on entame alors la seconde phase du jet où on a une compétition entre la capillarité (le ligament qui se rétracte) et la vitesse du jet due à l'impact (le ligament qui s'étire). Pendant cette seconde phase, on peut avoir le phénomène d'évitement comme le montre la figure 3.14, (b), lorsque la vitesse de rétraction contrebalance la vitesse inertielle du jet.

### 3.9.2 Rétraction du cône liquide

La seconde expérience concerne la rétraction du cône liquide (figure 3.14, (a)). Il s'agit de la même expérience que celle qui est décrite dans la section 3.3. Lorsque la quantité de liquide dans la paille est petite, la vitesse de drainage est moins importante et le liquide adhère plus à la paroi de la paille de telle manière que la dernière

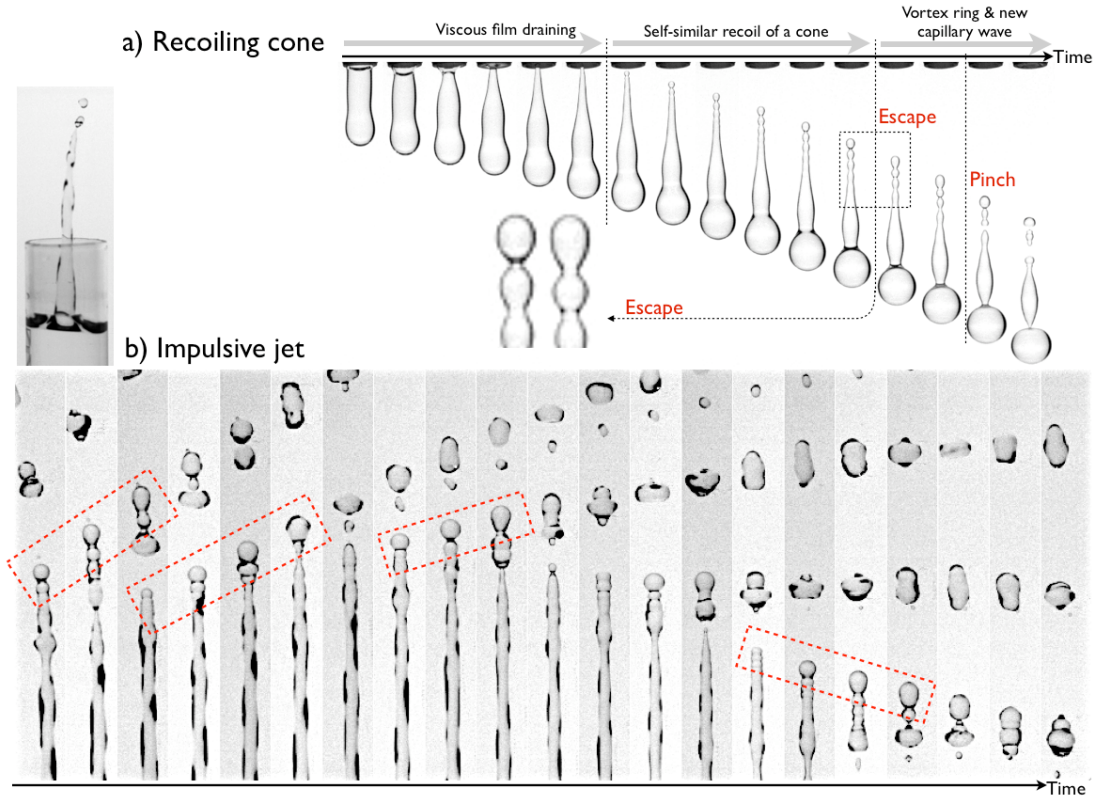


FIGURE 3.14 – Généralité du phénomène d'évitement. **a)** : rétractation du cône liquide. **b)** : évitement du jet issu de l'impact d'un tube rempli d'eau sur un substrat solide.

goutte qui sort, tombe du tube sous forme de cône liquide. L'étude du cône liquide est particulièrement intéressante pour la compréhension de la segmentation capillaire. Si l'on fait un zoom sur la segmentation, lors du détachement de la goutte, on remarque que la pointe du reste du ligament prend la forme d'un cône liquide (se référer au chapitre 1, paragraphe "Dynamique de la segmentation : solutions auto-semblables"). C'est d'ailleurs le cas dans n'importe quel type de segmentation (voir [25, 15]). Dans le cas de la segmentation du ligament, le cône liquide se rétracte rapidement pour former un nouveau bourrelet.

Ce cône, Sierou & Lister [60] l'ont particulièrement étudié. Ils ont montré que lors de la rétractation de ce cône, l'onde capillaire évolue de manière auto-semblable et qu'il n'y a pas de segmentation. Un phénomène est dit auto-semblable lorsqu'il grandit/diminue dans le temps sans pour autant changer de forme. L'analyse dimensionnelle montre qu'il n'existe qu'une seule échelle caractéristique de longueur  $L_{sim} = (\sigma t^2 / \rho)^{1/3}$  pouvant être basée sur le temps (voir [25, 15]), avec  $\sigma$  la tension de surface du ligament,  $\rho$  sa densité et  $t$  le temps. Considérons un cône liquide d'angle  $\theta$ , de composante radiale  $r$  et de hauteur  $z$ . Les courbes de la séquence temporelle de son interface, lors de la rétractation



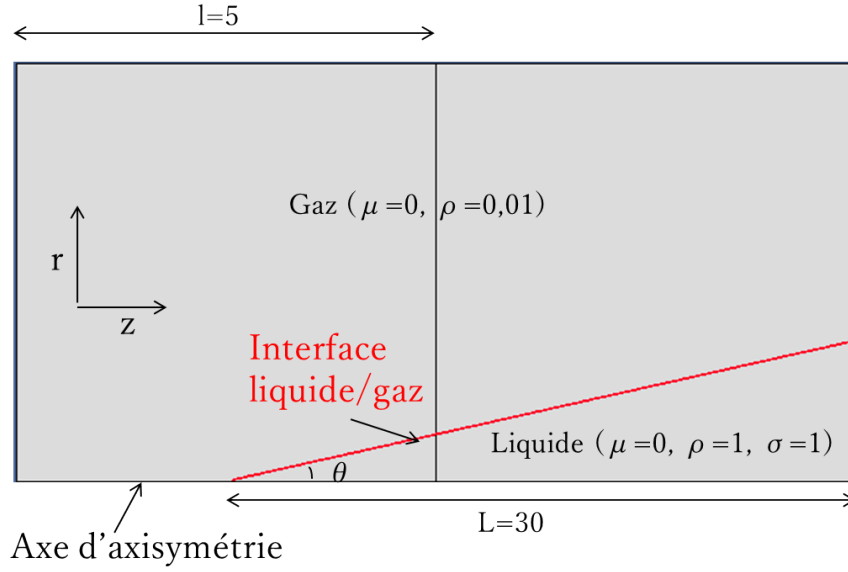


FIGURE 3.15 – Rétractation du cône liquide : condition initiale. Le cône liquide (de densité  $\rho = 1$ , de viscosité nulle  $\mu = 0$ , de tension de surface  $\sigma = 1$ ) est entouré d'un liquide non visqueux et cent fois moins dense.

se superposent parfaitement (figure 3.16, (a)), dans le repère dit d'auto-similarité,

$$\left( r / \left( \sigma t^2 / \rho \right)^{1/3} ; z / \left( \sigma t^2 / \rho \right)^{1/3} \right).$$

Nous avons également confirmé ce résultat avec nos simulations numériques. Avec *Gerris*, nous avons effectué des calculs sur la rétractation du cône liquide d'angles différents  $\theta$ , et de hauteur  $z = 30$ . Le domaine de simulation est constitué de deux boîtes de *Gerris*, chacune de longueur 20. Le cône liquide (de densité  $\rho = 1$ , de viscosité nulle  $\mu = 0$ , de tension de surface  $\sigma = 1$ ) est entouré d'un liquide non visqueux et cent fois moins dense. La pointe du cône a été légèrement arrondi par un bout sphérique de rayon 0.06, pour limiter le niveau de maillage au niveau de la pointe. Les simulations sont axisymétriques (voir 3.15). Le maillage est adaptatif et le niveau de raffinement le plus élevé est  $l_{max} = 11$ , c'est à dire que la taille de la plus petite cellule est  $20/2^{11}$ .

La comparaison avec les résultats de Sierou et al. (2004), est présentée sur la figure 3.16. Les composantes (radiale  $r$  et la hauteur  $z$ ) sont dimensionnées par l'échelle de longueur d'auto-similarité  $\left( \sigma t^2 / \rho \right)^{1/3}$ . Pour chacun des angles, nous avons superposé 38 courbes, qui correspondent à l'interface du cône liquide dans l'intervalle de temps allant de 0.5 à 8 par pas de 0.2. Nous obtenons un très bon accord entre nos courbes celles de Sierou et al. (figure 3.16), lorsque l'angle du cône liquide est assez grand. Pour le plus petit angle  $\theta_0 = 0.075 \text{ rad}$ , soit  $4.3 \text{ deg}$ , on constate un décalage entre nos



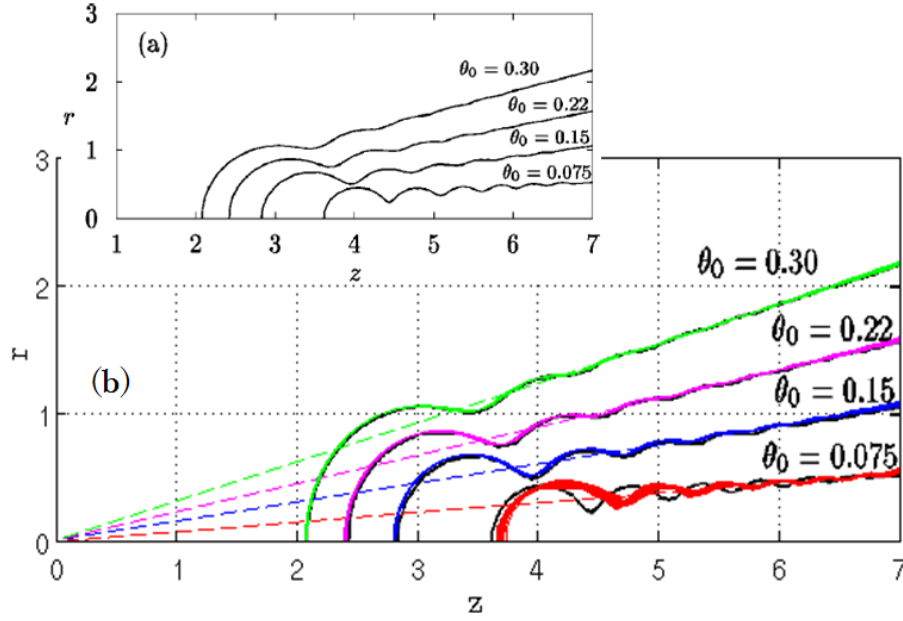


FIGURE 3.16 – (a) : solutions auto-semblables pour différents angles d’ouverture du cône liquide, la figure est tirée de l’article de Sierou et al. [60]. (b) : comparaison avec les résultats des simulations.

simulations et les solutions de Sierou [60].

Contrairement au cas du ligament cylindrique, la vitesse de rétractation du bout du cône liquide n’est pas une constante mais dépend du temps [60]. Elle dépend également de l’angle d’ouverture du cône. Plus l’angle du cône  $\theta$  est petit, plus sa vitesse de rétractation est grande (voir figure 3.16). L’explication est simple, plus le cône est pointu, moins il y a de masse liquide, à collecter par capillarité. Il en résulte alors que la vitesse à travers le cou du cône liquide (lors de sa rétractation) en direction de son bourrelet est plus importante lorsque son angle est petit. Par ailleurs, plus le cône est pointu, plus le rayon de son cou est petit.

Dans ce cas de cône pointu (le cas de  $\theta = 0.0075 \text{ rad}$  par exemple), nous avons observé dans nos simulations, la formation de deux anneaux tourbillonnaires à l’intérieur du bourrelet (voir figure 3.17 où la viscosité  $\mu = 10e - 5$ ). Un de ces deux anneaux tourbillonnaires (en rouge) naît de la rétractation violente de la pointe du cône et est probablement d’ordre numérique, à cause de la pointe du cône pas très bien maillée. Le second, se détache du cou du cône vers le bourrelet. Ce détachement vers le bourrelet ressemble fortement à celui qu’on a observé lors du phénomène d’évitement, dans le cas de la rétractation du ligament liquide. Et comme dans le cas du ligament, l’effet du lâcher tourbillonnaire va modifier le comportement de l’écoulement au niveau du cou du cône liquide, et suffisamment pour le dévier du comportement auto-semblable

de Sierou et al. [60]. On le voit bien sur la figure 3.16, lorsque  $\theta = 0.075 \text{ rad}$ ).

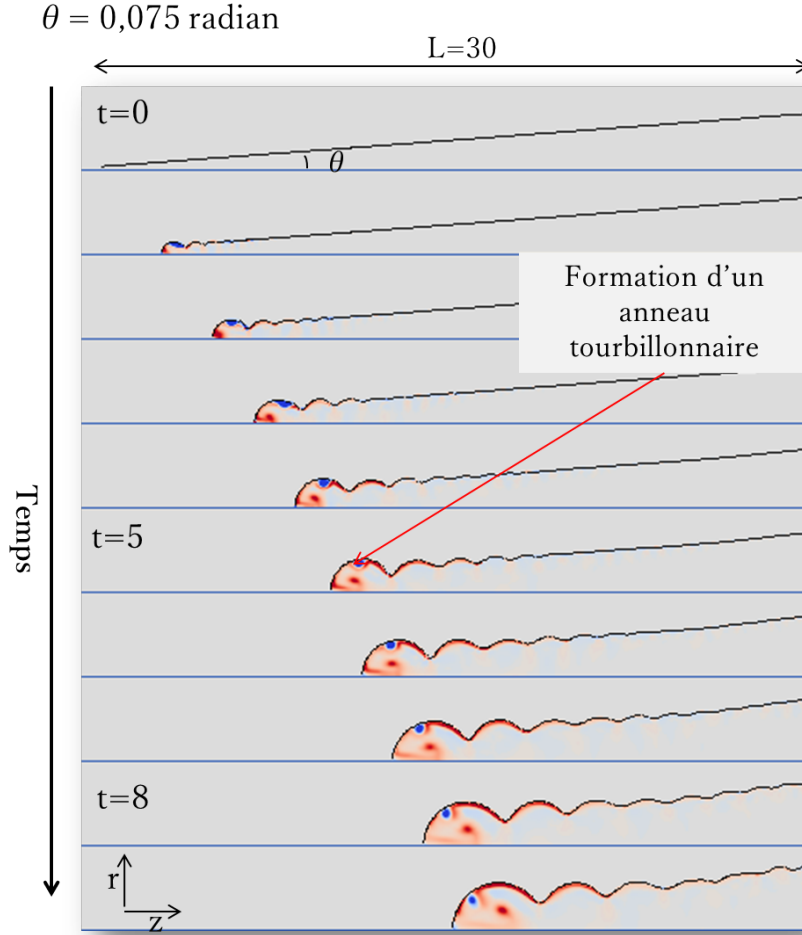


FIGURE 3.17 – Rétractation du cône liquide de demi-angle au sommet  $\theta = 0.075 \text{ radian}$  et de hauteur  $L = 30$  : lâcher d'un anneau tourbillonnaire à l'intérieur du cône liquide, qui dévie la rétractation du cône de la solution auto-semblable de Sierou [60].

On peut aussi remarquer que le bourrelet, dans nos simulations, dans le cas  $\theta = 0.075 \text{ rad}$ , semble prendre une forme un peu plus ovale que les solutions auto-semblables de Sierou et al. [60] (à peu près sphériques). Cette forme légèrement ovale est celle que prend volontiers le bourrelet juste après un évitement lors de la rétractation d'un ligament cylindrique. Ainsi, nous avons un comportement assez proche du phénomène d'évitement décrit plus haut. Sauf que nous ne pouvons pas parler d'évitement dans le cas d'un cône liquide, étant donné que le rayon du cou du cône, en fonction du temps, reste croissant pendant la rétractation [60], quelque soit la viscosité du liquide. Il n'y a donc pas de réduction puis augmentation du rayon en fonction du temps. Mais nous voyons tout un ensemble de phénomènes (le lâcher tourbillonnaire, la forme ovale du

bourrelet) qui arrive lorsque l'angle du cône est petit, et qui font que les solutions auto-semblables de [60] ne sont plus valables.

### 3.10 Conclusion

Ce chapitre sur la segmentation capillaire nous montre des phénomènes physiques importants pour la compréhension du processus de création des gouttes à partir d'un ligament. Nous avons remarqué que dans chaque processus d'atomisation il y a une étape importante qui est celle de la formation de ligaments qui vont s'étirer, se déstabiliser, pour former des gouttes. Nous nous sommes donc concentrés sur l'étude de la segmentation du ligament. Nous avons commencé par le cas simple du ligament cylindrique avec bout sphérique, soumis à la seule force de la capillarité. Il a été montré que celui-ci dépend de deux paramètres sans dimensions : le nombre d'Ohnesorge  $Oh$  et le rapport d'aspect  $L/R$ . À partir de ces deux paramètres nous avons dressé la carte comportementale de la segmentation du ligament, notamment la frontière entre : "le ligament se segmente" ou "le ligament ne se segmente pas".

Nous avons montré l'existence du phénomène d'évitement qui empêche le ligament de se segmenter lorsque son nombre d'Ohnesorge est supérieur à la valeur critique  $Oh_c = 0.0025$ . Dans ce cas la couche de vorticité, au niveau de la zone de l'étranglement, se développe et se décolle de l'interface sous forme de jet en aval du cou, suivi d'un lâcher tourbillonnaire. Ce soudain changement provoque la création d'un second cou qui induit un retour de fluide qui à son tour oblige le cou à se rouvrir. L'écoulement à travers le cou du ligament est celui du Venturi capillaire. C'est cette piste que nous allons explorer dans le prochain chapitre. Nous avons également montré la généralité du phénomène d'évitement en décrivant deux autres expériences (rétractation du cône liquide, jet issu de l'impact d'un tube contenant du liquide sur un solide). Enfin nous avons confirmé les solutions auto-semblables de Sierou et al. [60], lors de la rétractation du cône liquide, lorsque l'angle du cône est assez grand. Lorsque le cône est très pointu ( $\theta \leq 0.22 \text{ rad}$ ), nous avons observé à l'intérieur du cône, un lâcher tourbillonnaire semblable à celui observé lors de l'évitement qui dévie le cône des solutions auto-semblables de [60].

- [1] ANTKOWIAK, A., BREMOND, N., LE DIZES, S., AND VILLERMAUX, E. Short-term dynamics of a density interface following an impact. *Journal of Fluid Mechanics* 577 (2007), 241–250.
- [2] AULISA, E., MANSERVISI, S., SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Interface reconstruction with least-squares fit and split advection in three-dimensional cartesian geometry. *Journal of Computational Physics* 225, 2 (2007), 2301–2319.
- [3] BAYVEL, L., AND ORZECOWSKI, Z. Liquid atomization, combustion : An international series, 1993.
- [4] BELL, J. B., AND MARCUS, D. L. A second-order projection method for variable-density flows. *Journal of Computational Physics* 101, 2 (1992), 334–348.
- [5] BLANCHARD, D. C., AND HEINRICH, B. C. *From raindrops to volcanoes*. Doubleday Garden City, NY, 1967.
- [6] BRACKBILL, J., KOTHE, D. B., AND ZEMACH, C. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of computational physics* 100, 2 (1992), 335–354.
- [7] BREMOND, N. *Stabilité et atomisation des nappes liquides*. PhD thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I, 2003.
- [8] BRENNER, M. P., AND GUEYFFIER, D. On the bursting of viscous films. *Physics of Fluids* 11 (1999), 737–739.
- [9] CASTREJÓN-PITA, A. A., CASTREJON-PITA, J., AND HUTCHINGS, I. Breakup of liquid filaments. *Physical review letters* 108, 7 (2012), 074506.
- [10] CHORIN, A. J. On the convergence of discrete approximations to the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation* 23, 106 (1969), 341–353.

- [11] CONRATH, M., CANFIELD, P., BRONOWICKI, P., DREYER, M. E., WEISLOGEL, M. M., AND GRAH, A. Capillary channel flow experiments aboard the international space station. *Physical Review E* 88, 6 (2013), 063009.
- [12] CULICK, F. Comments on a ruptured soap film. *Journal of applied physics* 31, 6 (1960), 1128–1129.
- [13] DE LA GRANGE, J. L. *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés : avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques*. Bachelier, 1826.
- [14] DRIESSEN, T., JEURISSEN, R., WIJSHOFF, H., TOSCHI, F., AND LOHSE, D. Stability of viscous long liquid filaments. *Physics of Fluids (1994-present)* 25, 6 (2013), 062109.
- [15] EGGERS, J. Universal pinching of 3d axisymmetric free-surface flow. *Physical Review Letters* 71, 21 (1993), 3458.
- [16] EGGERS, J., AND DUPONT, T. F. Drop formation in a one-dimensional approximation of the navier–stokes equation. *Journal of fluid mechanics* 262 (1994), 205–221.
- [17] FRANCOIS, M. M., CUMMINS, S. J., DENDY, E. D., KOTHE, D. B., SICILIAN, J. M., AND WILLIAMS, M. W. A balanced-force algorithm for continuous and sharp interfacial surface tension models within a volume tracking framework. *Journal of Computational Physics* 213, 1 (2006), 141–173.
- [18] GHABACHE, E., ANTKOWIAK, A., JOSSEERAND, C., AND SÉON, T. On the physics of fizziness : How bubble bursting controls droplets ejection. *Physics of Fluids (1994-present)* 26, 12 (2014), 121701.
- [19] GUEYFFIER, D., LI, J., NADIM, A., SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *Journal of Computational Physics* 152, 2 (1999), 423–456.
- [20] HARVIE, D. J., DAVIDSON, M., AND RUDMAN, M. An analysis of parasitic current generation in volume of fluid simulations. *Applied mathematical modelling* 30, 10 (2006), 1056–1066.
- [21] HOYT, J. W., AND TAYLOR, J. Waves on water jets. *Journal of Fluid Mechanics* 83, 01 (1977), 119–127.
- [22] JAMES, A., VUKASINOVIC, B., SMITH, M. K., AND GLEZER, A. Vibration-induced drop atomization and bursting. *Journal of Fluid Mechanics* 476 (2003), 1–28.

- [23] KELLER, H. Lectures on numerical methods in bifurcation problems. *Applied Mathematics* 217 (1987), 50.
- [24] KELLER, J. B. Breaking of liquid films and threads. *Physics of Fluids (1958-1988)* 26, 12 (1983), 3451–3453.
- [25] KELLER, J. B., AND MIKSI, M. J. Surface tension driven flows. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 43, 2 (1983), 268–277.
- [26] KUBITSCHKE, J., AND WEIDMAN, P. Helical instability of a rotating liquid jet. *Physics of Fluids* 20, 9 (2008), 91104.
- [27] LAFAURIE, B., NARDONE, C., SCARDOVELLI, R., ZALESKI, S., AND ZANETTI, G. Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with surfer. *Journal of Computational Physics* 113, 1 (1994), 134–147.
- [28] LAPLACE, P. S. *Traité de mécanique céleste/par PS Laplace...; tome premier [-quatrième]*, vol. 4. de l’Imprimerie de Crapelet, 1805.
- [29] LHUISSIER, H., AND VILLERMAUX, E. Soap films burst like flapping flags. *Physical review letters* 103, 5 (2009), 054501.
- [30] LI, J. Calcul d’interface affine par morceaux. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, astronomie* 320, 8 (1995), 391–396.
- [31] LI, J. *Résolution numérique de l’équation de Navier-Stokes avec reconnection d’interfaces. Méthode de suivi de volume et application à l’atomisation*. PhD thesis, 1996.
- [32] LOWRY, B. J., AND STEEN, P. H. Stability of slender liquid bridges subjected to axial flows. *Journal of Fluid Mechanics* 330 (1997), 189–213.
- [33] MADDOCKS, J. H. Stability and folds. *Archive for Rational mechanics and Analysis* 99, 4 (1987), 301–328.
- [34] MARMOTTANT, P. *Atomisation d’un liquide par un courant gazeux*. PhD thesis, Grenoble, INPG, 2001.
- [35] MARTÍNEZ, I., AND PERALES, J. Liquid bridge stability data. *Journal of crystal growth* 78, 2 (1986), 369–378.
- [36] MESEGUER, J. The influence of axial microgravity on the breakage of axisymmetric slender liquid bridges. *Journal of crystal growth* 62, 3 (1983), 577–586.
- [37] M’KENDRICK, J. G. Helmholtz in berlin—physical researches continued [1].
- [38] MYSHKIS, A., BABSKII, V., KOPACHEVSKII, N., SLOBOZHANIN, L., TYUPTSOV, A., AND WADHWA, R. Low-gravity fluid mechanics. *Translated from the*

- Russian by Wadhwa, RS, XIX, 583 pp. 218 figs.. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1 (1987).*
- [39] NIKITOPOULOS, D. E., AND KELLY, A. J. Formation of a net-negative charged liquid spray. *Physics of Fluids (1994-present)* 12, 9 (2000), S7–S7.
  - [40] NOTZ, P. K., AND BASARAN, O. A. Dynamics and breakup of a contracting liquid filament. *Journal of Fluid Mechanics* 512 (2004), 223–256.
  - [41] PLATEAU, J. *Acad. Sci.*, vol. XVI. Bruxelles Mém., 1843.
  - [42] PLATEAU, J. *Acad. Sci.*, vol. XXIII. Bruxelles Mém., 1849.
  - [43] PLATEAU, J. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, vol. 2. Gauthier-Villars, 1873.
  - [44] POPINET, S. Gerris : a tree-based adaptive solver for the incompressible euler equations in complex geometries. *Journal of Computational Physics* 190, 2 (2003), 572–600.
  - [45] POPINET, S. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *Journal of Computational Physics* 228, 16 (2009), 5838–5866.
  - [46] POPINET, S., AND ZALESKI, S. A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 30, 6 (1999), 775–793.
  - [47] QUERE, D., DE GENNES, P., BROCHARD-WYART, F., AND REISINGER, A. Capillarity and wetting phenomena : Drops, bubbles, pearls, waves, 2004.
  - [48] RAYLEIGH, L. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proceedings of the London Mathematical Society* 1, 1 (1879), 57–72.
  - [49] RAYLEIGH, L. Some applications of photography. *Nature* 44, 1133 (1891), 249–254.
  - [50] RAYLEIGH, L. *Sci. Papers*, vol. I. 1899.
  - [51] RAYLEIGH, L. *Sci. Papers*, vol. III. 1902.
  - [52] RENARDY, Y., AND RENARDY, M. Prost : a parabolic reconstruction of surface tension for the volume-of-fluid method. *Journal of Computational Physics* 183, 2 (2002), 400–421.
  - [53] RIDER, W. J., AND KOTHE, D. B. Reconstructing volume tracking. *Journal of computational physics* 141, 2 (1998), 112–152.
  - [54] SAVART, F. Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Ann. Chim. Phys* 53, 337 (1833), 1833.

- [55] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annual review of fluid mechanics* 31, 1 (1999), 567–603.
- [56] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Analytical relations connecting linear interfaces and volume fractions in rectangular grids. *Journal of Computational Physics* 164, 1 (2000), 228–237.
- [57] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Interface reconstruction with least-square fit and split eulerian–lagrangian advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 41, 3 (2003), 251–274.
- [58] SCHULKES, R. The contraction of liquid filaments. *Journal of Fluid Mechanics* 309 (1996), 277–300.
- [59] SÉBILLEAU, J., LIMAT, L., AND EGGERS, J. Flow separation from a stationary meniscus. *Journal of Fluid Mechanics* 633 (2009), 137–145.
- [60] SIEROU, A., AND LISTER, J. R. Self-similar recoil of inviscid drops. *Physics of Fluids (1994-present)* 16, 5 (2004), 1379–1394.
- [61] SLOBOZHANIN, L. A., AND PERALES, J. M. Stability of liquid bridges between equal disks in an axial gravity field. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics (1989-1993)* 5, 6 (1993), 1305–1314.
- [62] STONE, H. A., AND LEAL, L. Relaxation and breakup of an initially extended drop in an otherwise quiescent fluid. *Journal of Fluid Mechanics* 198 (1989), 399–427.
- [63] SUSSMAN, M., ALMGREN, A. S., BELL, J. B., COLELLA, P., HOWELL, L. H., AND WELCOME, M. L. An adaptive level set approach for incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics* 148, 1 (1999), 81–124.
- [64] THOMSON, W. Hydrokinetic solutions and observations.(lord kelvin). In *Proc. Royal Soc* (1871), vol. 7, p. 63.
- [65] TIAHJADI, M., STONE, H., AND OTTINO, J. Satellite and subsatellite formation in capillary breakup. *Journal of Fluid Mechanics* 243 (1992), 297–317.
- [66] WEBER, C. Zum zerfall eines flüssigkeitsstrahles. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 11, 2 (1931), 136–154.
- [67] ZEFF, B. W., KLEBER, B., FINEBERG, J., AND LATHROP, D. P. Singularity dynamics in curvature collapse and jet eruption on a fluid surface. *Nature* 403, 6768 (2000), 401–404.





## CHAPITRE 4

# STABILITÉ DU PONT CAPILLAIRE

### Sommaire

4.1	Introduction . . . . .	93
4.2	Description du modèle de simulation . . . . .	97
4.3	Nos simulations . . . . .	99
4.4	Résultats . . . . .	103
4.5	Évolution de la frontière d'instabilité dans le cas dynamique	107
4.6	Études expérimentales . . . . .	108
4.7	Conclusion . . . . .	117

### 4.1 Introduction

L'adhésion capillaire est un mécanisme physique, permettant de maintenir en contact deux corps par capillarité, par l'intermédiaire d'un volume liquide. Déposons une goutte d'eau entre deux billes solides. Si le volume de la goutte est suffisamment petit, la goutte forme un pont liquide entre les deux billes, et assure ainsi leur cohésion par la capillarité. C'est le cas par exemple des châteaux de sable à la plage où l'eau assure la cohésion entre les grains de sable pour les maintenir ensemble. Si les grains de sable sont secs (volume d'eau insuffisant), on se rend compte que le château ne tient pas. De la même manière, si les grains de sable sont trop mouillés, le château est trop mou et il s'effondre. On comprend par là qu'il faut un volume minimal suffisant, pour maintenir deux ou plusieurs grains en cohésion. Dans le cas de deux grains, ce volume suffisant correspond à une surface mathématique minimale entre ces deux grains, comme c'est

le cas de la caténoïde pour un film de savon entre deux anneaux sphériques (voir les expériences de Plateau [43] sur les films de savon), ou encore la sphère pour un volume de liquide donné. Pour séparer les deux grains maintenus en cohésion, il faut vaincre la force de cohésion qui est la capillarité. Il s'agit donc de fragmenter, par étirement, cette surface minimale entre les deux grains. Ce qui suppose qu'il existe pour le volume minimal suffisant, une distance critique entre les deux grains, au dessus de laquelle le pont formé par le volume liquide se rompt. Il apparaît alors que la ténacité, ou plus précisément la stabilité du pont va dépendre d'un nombre de paramètres comme la tension de surface, le volume du pont, la longueur entre les deux grains (la longueur du pont) et la forme des deux substrats solides (les grains).

L'étude de la stabilité du pont capillaire a reçu une attention particulière au cours de ces deux dernières décennies. Plusieurs configurations ont été étudiées par les chercheurs. Mais le cas classique reste l'étude de la stabilité du pont capillaire entre deux disques solides, soumis à une faible gravité (voir Myshkis et al. [38]). Les études sur l'influence de la gravité sont assez récentes : c'est le cas des études de Martinez [35] ou de Slobozhanin [61]. Le cas de la stabilité du pont capillaire entre deux disques de diamètres différents a été étudié par Myshkis et al. (1987), et par Meseguer [36].

Dans ce chapitre, nous allons nous consacrer au cas de la stabilité d'un pont capillaire entre deux tubes alignés et de même diamètre. Le système étudié (voir figure 4.1) est constitué d'un volume liquide, axisymétrique, entre deux tubes circulaires, coaxiaux, et identiques (un peu comme Plateau sur les films de savon [43], 1873). Nous considérons pour le moment ce système sans gravité.

Deux cas seront étudiés. Nous commencerons par le cas statique, il s'agit de faire des comparaisons ou de vérifier les différents résultats de la littérature.

Le système dépend dans ce cas de deux nombres sans dimensions : le rapport d'aspect  $L/R$  du pont, définit par le quotient de la longueur du pont par le rayon des tubes, et le rapport de volumes  $V_0/\pi R^2 L$  définit par le quotient entre le volume réel de fluide  $V_0$  dans le pont et le volume du cylindre (en pointillé sur la figure 4.1,  $V_{cyl} = \pi(R^2 L)$  de longueur  $L$  et de rayon  $R$ ). Ce cas classique de la stabilité du pont capillaire a été particulièrement décrit par Slobozhanin et al. [61].

Au delà du cas classique de l'étude de la stabilité du pont capillaire, nous allons nous intéresser à une configuration un peu plus complexe, en imaginant un débit à travers le pont capillaire [11] : c'est le pont capillaire dynamique. Une autre situation du pont capillaire dynamique est observable lorsqu'on libère du liquide à travers un tube placé quelques millimètres au dessus d'un bain liquide (voir Sébilleau et al. [59]).

L'étude du pont dynamique est particulièrement intéressante pour nous, car il mo-

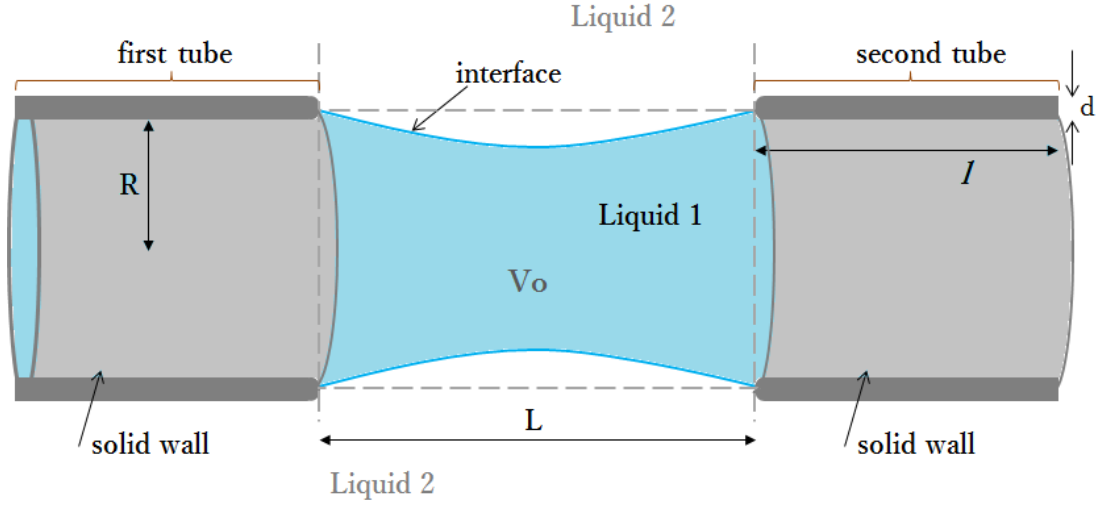


FIGURE 4.1 – Modèle de simulation du pont capillaire

délie d'une certaine manière, la structure du cou d'un ligament liquide lors de sa rétraction (voir figure 4.2). En effet, nous avons décrit dans le chapitre précédent, le phénomène d'évitement pour un ligament dont le nombre d'Ohnesorge dépasse  $Oh_c = 0.0025$ . Au cours de ce phénomène nous avons montré que l'écoulement à travers le cou du ligament est celui d'un Venturi capillaire. Et ce Venturi capillaire n'est rien d'autre que notre pont capillaire dynamique (voir la figure 4.5, **(b)**). Son étude nous permet alors, d'apporter plus de compréhension au phénomène d'évitement et donc au mécanisme de la segmentation capillaire. Mais l'étude de la stabilité du pont capillaire dynamique s'ouvre sur plusieurs phénomènes physiques que nous présenterons tout au long de ce chapitre. Malheureusement, nous disposons de peu de résultats dans la littérature sur le sujet.

En plus des différents paramètres qui régissent le cas statique, nous rajoutons dans le cas dynamique, un nouveau paramètre qui est le débit à travers le pont capillaire. Ce nouveau paramètre rajoute un degré de liberté au système classique du pont, et modifie sa stabilité. Ainsi le système dynamique dépend, en plus de  $R/L$  et de  $V$ , du nombre de Weber,  $We = \rho RU^2/\sigma$ , où  $\rho$  est la densité du liquide entre les deux tubes et  $U$  la vitesse imposée. Récemment, un article a été publié pour ce cas dynamique par Conrath et al. [11] sur la station spatiale internationale où ils déterminent le débit volumique critique, au delà duquel l'interface du pont se déforme pour emprisonner une bulle d'air et l'advecter dans l'écoulement.

Le présent chapitre est organisé comme suit : dans la première section nous décrirons nos études numériques. Pour confirmer nos résultats numériques, plusieurs expériences

ont été menées pour le cas aussi bien statique que dynamique. Dans la seconde section, nous validerons nos résultats numériques par comparaison à ceux de Slobozhanin et al. [61], pour le cas statique (figure 4.5). Nous nous sommes focalisés surtout sur le cas où  $V_0/V_{cyl} \leq 1$  : le venturi capillaire.

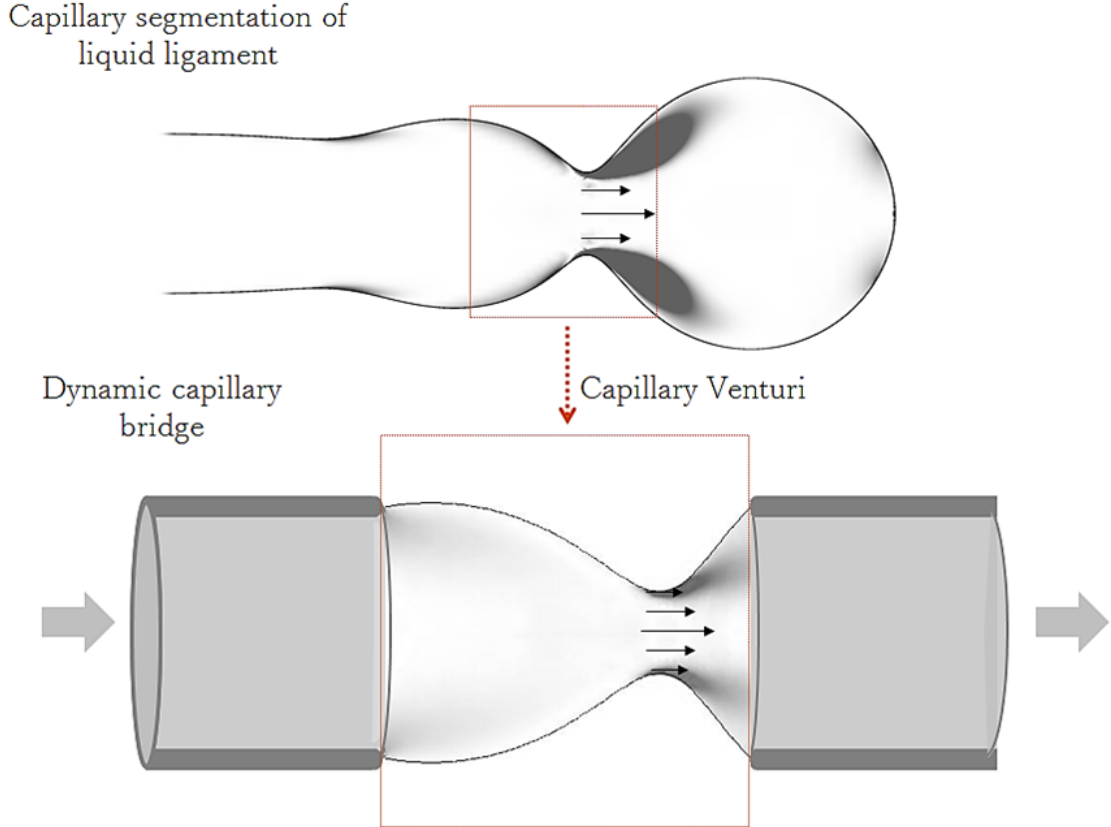


FIGURE 4.2 – Écoulement dans un pont capillaire dynamique, comparaison avec l'écoulement à travers le cou d'un ligament liquide lors de sa rétractation : le Venturi capillaire. Les images sont de vraies captures issues de nos simulations numériques.

Dans le cas dynamique nous avons développé un code matlab basé sur les équations 1D de Navier-Stokes [16] (voir le chapitre prochain). Il s'agit des équations qui décrivent un ligament liquide axisymétrique et suffisamment allongé. Les résultats numériques seront présentés dans la section 3 du chapitre. Enfin nous présenteront nos études expérimentales sur le pont capillaire, que nous comparons avec les résultats théoriques (dans le cas statique) et numériques (dans le cas dynamique).

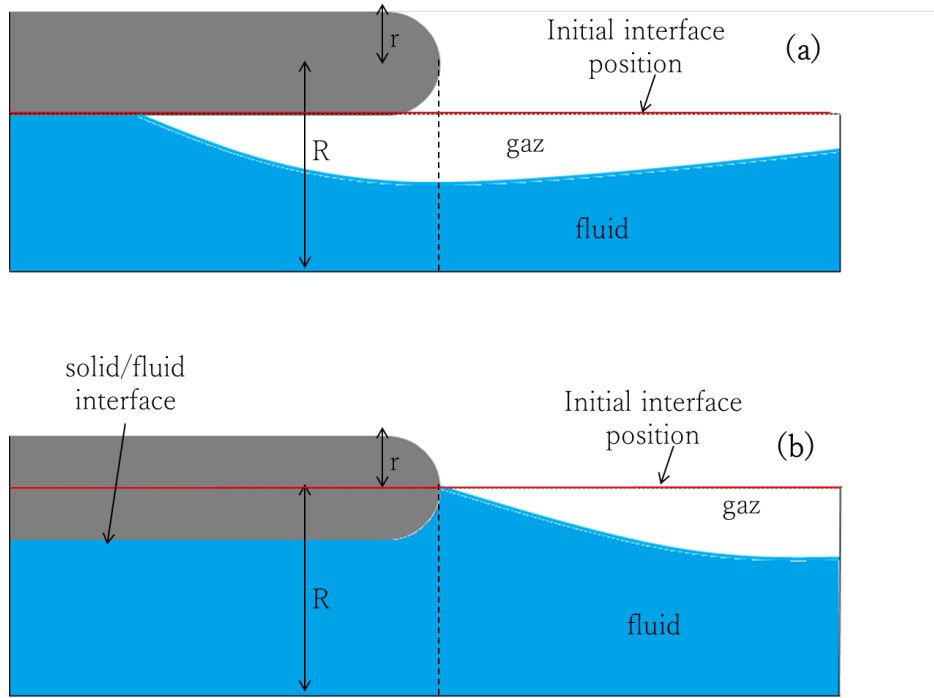


FIGURE 4.3 – Description schématique de différentes manières de placer initialement les interfaces liquide/gaz et solide/liquide (zoom sur le point triple du tube d’entrée du pont). **(a)** : les interfaces liquide/gaz et solide/liquide sont à la même hauteur. **(b)** : l’interface solide/liquide est placée à une hauteur plus basse que l’interface liquide/gaz.

## 4.2 Description du modèle de simulation

Le système étudié est résumé sur la figure 4.1. Les deux tubes solides de rayon intérieur  $R - r$  ont une épaisseur  $d = 2r = 0.05$  et une longueur  $l$ . La distance entre ces deux tube,  $L$ , est la longueur du pont capillaire. La condition initiale du pont est un cylindre liquide de rapport d’aspect  $L/R$  entre les deux tubes, entouré par un fluide 100 fois moins visqueux et 100 fois moins dense. Les propriétés physiques du liquide dans le pont sont :  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $\mu = 0.01$ , avec  $\mu$  la viscosité dynamique.

### 4.2.1 L’interface solide/liquide/air

Initialement le pont capillaire, dans toutes nos simulations, est un cylindre liquide ( $V_0/V_{cyl} = 1$ ). Si initialement le cylindre liquide a le même rayon que le rayon intérieur des tubes (voir figure 4.3, **(a)**), alors les interfaces liquide/air et liquide/solide ont initialement la même hauteur. Elles sont donc libres. Dans ce cas, l’interface liquide/solide

décolle, une fois qu'on décroît le volume du pont (figure 4.3, **(a)**), et d'une certaine manière, il n'y a plus de pont. Il nous faut donc trouver une manière pour empêcher ce décollement.

L'astuce avec *Gerris* est de placer initialement ces deux interfaces dans la position du la figure 4.3, **(b)**. C'est à dire que l'interface liquide/gaz du cylindre liquide est à la hauteur  $R$ , tandis que l'interface solide/liquide est à  $R-r$ . Cette astuce permet de fixer l'interface solide/liquide pour l'empêcher de se décoller, mais aussi d'avoir une sorte de point d'encrage au niveau du point triple où on a les trois interfaces solide-liquide-air. L'inconvénient de cette astuce est qu'il y a une légère différence de hauteurs entre l'interface solide/liquide à l'intérieur des tubes ( $R-r$ ) et l'interface liquide/air ( $R$ ), qui est de longueur  $r$ . Dans nos études numériques, il est important d'avoir cette différence de hauteur  $r$  la plus petite possible. D'une part, pour pouvoir faire nos comparaisons, notamment avec le code 1D (qui sera développé dans le chapitre prochain) et d'autre part, pour nous éviter des complications numériques. En effet, dans le cas dynamique par exemple, si  $r$  est grand, puisque le débit dans le pont capillaire traverse d'abord le tube d'entrée, de rayon  $R$  (figure 4.1), une zone de recirculation se crée autour du point triple (où se situe la différence de hauteurs) et modifie l'écoulement autour. Dans nos simulations nous avons gardé  $r/R = 0.025$ , soit 40 fois plus petit que le rayon intérieur des tubes. Cette hauteur est assez petite pour supposer que le débit dans le pont capillaire est exactement le même que le débit entrant ou sortant de ces deux tubes. Dans la suite de nos calculs nous allons négliger  $r$ .

### 4.2.2 Le maillage

Les données qui seront importantes pour nous dans ces simulations seront : la position de l'interface liquide/air, la vorticité à l'intérieur du pont capillaire et le volume  $V_0$  de liquide dans le pont. Comme pour le cas de la rétractation des ligaments liquides nous utiliserons des fonctions basées sur ces données pour adapter nos maillages. Ce qu'il y a de nouveau dans le pont capillaire c'est le maillage des deux tubes (qui sont des solides). Comme les calculs sont axisymétriques, les tubes du pont sont définis, simplement par le rectangle de longueur  $l$  et d'épaisseur  $d$  (ce qui définit en fait l'épaisseur des tubes). Nous rajoutons au rectangle, dans nos simulations, une demi-sphère de rayon  $r$  pour obtenir une forme arrondi au niveau du point triple et éviter les coins pointus difficiles à mailler (voir figure 4.3).

Le fait d'avoir  $r/R = 0.025$  si petit, impose un niveau de maillage pour le solide. Selon le rapport d'aspect du pont capillaire, nous avons utilisé jusqu'à 14 boîtes de *Gerris*, chacune de longueur 1. Ainsi, pour pouvoir bien capturer l'épaisseur du solide

(surtout au niveau du bout arrondi) il faut par exemple, au minimum un niveau de maillage 7 ( $1/2^7 = 0.0078$ ) pour pouvoir mettre 3 cellules de maillage sur l'épaisseur ( $d = 0.05$ ) du solide. Le long du solide n'a, lui, pas besoin d'être aussi finement maillé. Nous avons défini un maillage décroissant dont le niveau maximal est 7 sur la demi-sphère solide et 3 le long du reste du solide. Une condition de non glissement sera imposée sur les surfaces solides le long des tubes.

### 4.3 Nos simulations

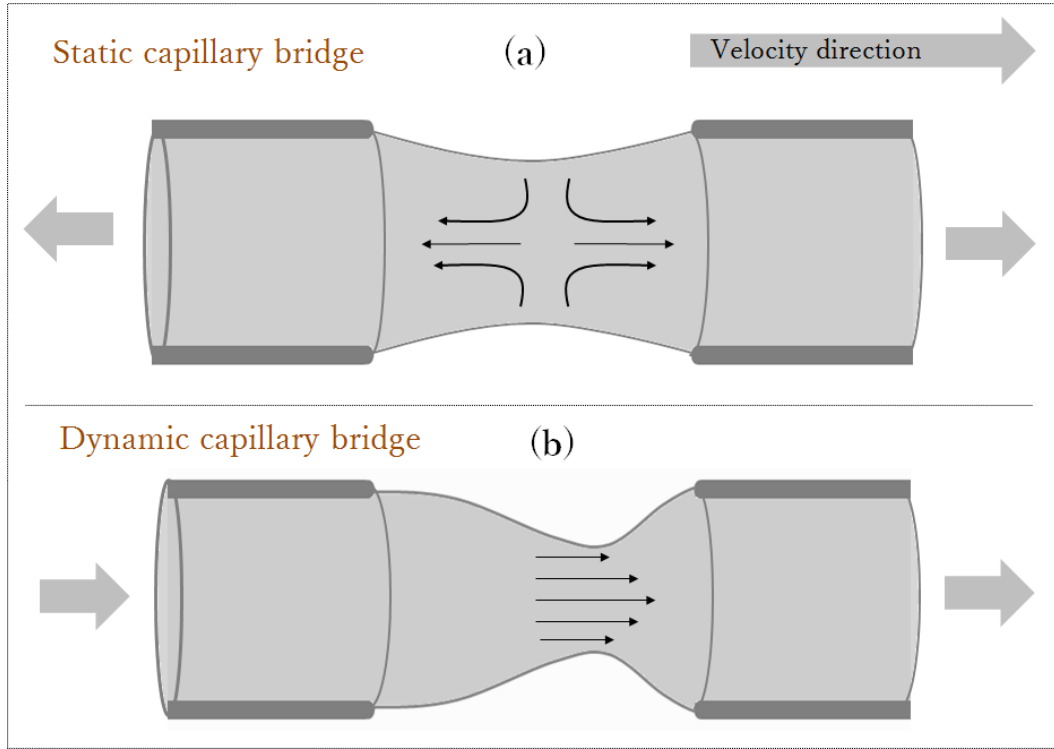


FIGURE 4.4 – Description schématique du protocole de simulation. **(a)** : cas statique, nous fixons le rapport d'aspect du pont et imposons un débit de pompage du pont jusqu'au claquage. **(b)** : cas dynamique, le rapport d'aspect et le volume du pont restent constants et nous augmentons progressivement le débit dans le pont jusqu'au claquage.



### 4.3.1 Cas statique : étude classique de la stabilité du pont capillaire, validation des nos simulations

Si le système du pont capillaire est considéré sans gravité, sa stabilité dépend de deux nombres sans dimensions :  $V_0/V_{cyl}$ ,  $L/R$ . Dans tous nos calculs nous avons fixé la viscosité du liquide dans le pont à  $\mu = 0.01$ . Déterminer la stabilité du pont, c'est trouver pour un rapport d'aspect fixé, le volume critique en dessous duquel le pont se rompt.

Les simulations sont menées de la manière suivante. On fixe en premier lieu, le rapport d'aspect  $L/R$  du pont. Le volume initial du pont liquide entre les deux tubes est celui du cylindre liquide (c'est à dire  $V_0/V_{cyl} = 1$ ). Pour réduire progressivement le volume du pont, nous avons défini une vitesse de pompage  $u_{max} = 0.025$  à l'entrée et à la sortie du système (voir figure 4.4, **(a)**). Ce qui implique un débit très faible de pompage égal à  $Q_p = (R^2\pi)u_{max}$ . Ce débit est choisi volontairement faible pour que la décroissance du volume du pont reste quasi-statique pendant le pompage. Une fois le pompage commencé, le pont se creuse mais reste stable. Dès que le volume critique est atteint, le pont capillaire devient instable et se rompt de manière brutale. On peut ainsi reproduire cette procédure pour différents rapports d'aspect et dresser ainsi le diagramme de stabilité du pont dans le repère  $(V_0/V_{cyl}, L/R)$ . Les résultats pour  $Bo = 0$  sont présentés sur la figure 4.5 et sont en très bon accord avec les résultats de la littérature ([61, 32, 35]). Rappelons que les calculs théoriques de stabilité de Slobozhanin [61] ont été effectués en considérant un pont capillaire entre deux disques de même diamètre. La comparaison reste donc possible à condition que la décroissance du volume du pont reste quasi-statique pendant le pompage. Pour cela nous avons testé plusieurs débits différents de plus en plus petits jusqu'à obtenir, pour un rapport d'aspect donné, un volume critique de rupture indépendant du débit. La figure 4.5, **(a)** montre le diagramme de stabilité de [61], pour les cas  $Bo = 0$  et  $Bo = 0.1$ . Étant donné les formes qui nous intéressent (la forme du cou du ligament), nous avons seulement effectué des calculs pour  $V_0/V_{cyl} \leq 1$  (figure 4.5, **(b)**).

Le bon accord entre nos simulations et les résultats de Slobozhanin nous prouve que le modèle de simulation est valide. On peut alors l'utiliser pour explorer le cas complexe avec un débit dans le pont capillaire : le cas du pont dynamique.

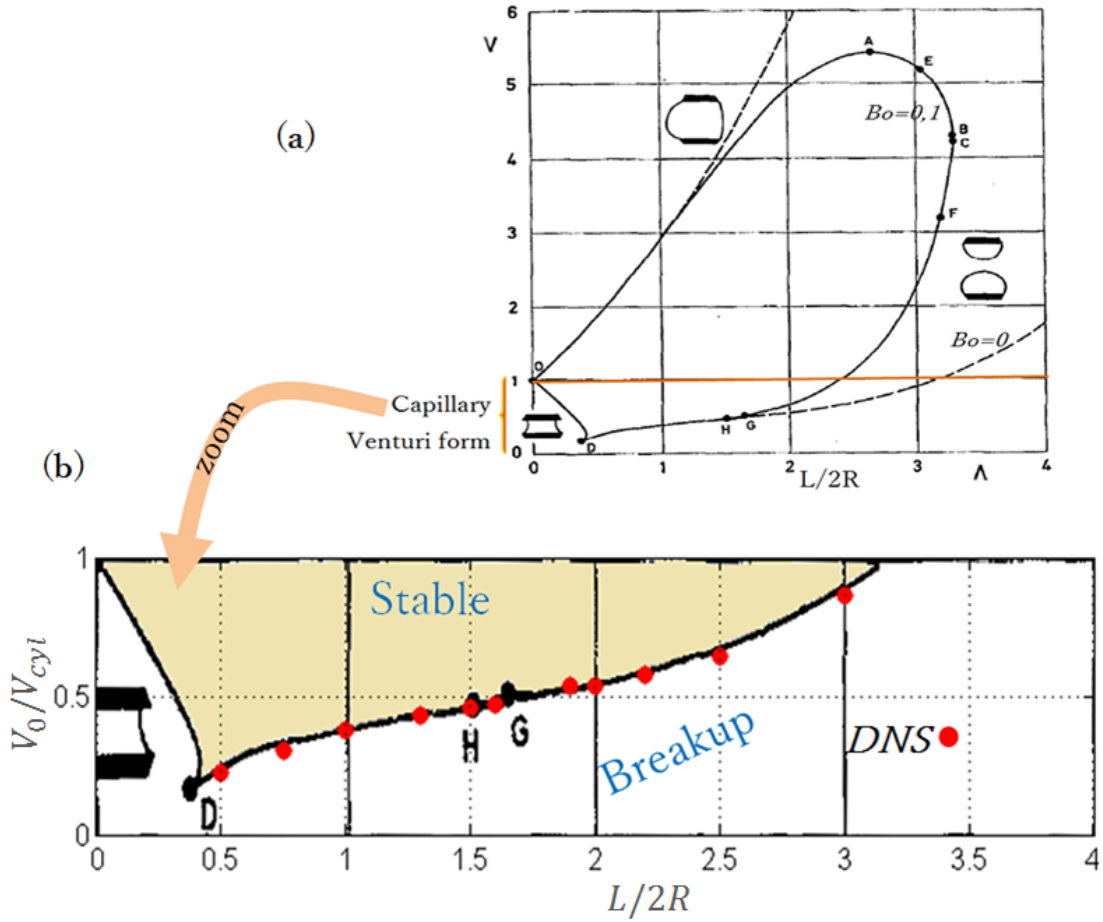


FIGURE 4.5 – Comparaison des diagrammes de stabilité. (a) : courbe de stabilité du pont capillaire de Slobozhanin [61], figure tirée de son article. (b) : comparaison avec les résultats de nos simulations, pour  $V_0/V_{cyl} \leq 1$  et  $Bo = 0$ .

### 4.3.2 Cas dynamique : introduction de débit dans le pont capillaire

#### Définition du volume du pont

Pour définir le volume initial du pont capillaire, on reprend la procédure du cas statique, en commençant par le cylindre liquide de volume  $V_0/V_{cyl} = 1$ , et on le fait décroître par pompage. Dans le cas présent, on n'ira pas jusqu'à la rupture du pont. On définit alors un temps d'arrêt de pompage, fini  $t_f$ . Ce temps  $t_f$  étant directement relié au volume  $(V_{cyl} - 2Qt_f)/V_{cyl}$  du pont capillaire. Cette manœuvre nous permet, pour un volume donné, de ne pas approximer la forme de l'interface du pont. Dans le cas d'un film de savon liquide entre deux anneaux, la forme de l'interface est une caténoïde,

qui est une surface mathématique minimale, la pression à l'intérieur et à l'extérieur du film étant la même (voir Plateau [43]). Dans le cas du pont capillaire nous n'avons pas de formule analytique décrivant la forme de l'interface. Le fait de creuser le cylindre liquide par pompage, définit la forme naturelle de l'interface correspondant au volume donné.

L'arrêt du pompage à  $t_f$ , provoque une oscillation de l'interface du pont pendant un certain temps. Il est donc important de définir un temps de relaxation suffisant pendant lequel le pont se relaxe pour que l'interface n'enregistre plus de fluctuation. Ce temps de relaxation  $t_r$  est estimé à  $t_r/t_c \geq 50$  dans nos simulations, avec  $t_c = \sqrt{\rho R^3/\sigma}$  le temps capillaire. À la fin de ce temps de relaxation nous avons notre pont capillaire avec un rapport d'aspect et un volume fixés.

### Introduction du débit dans le pont

Une fois le volume du pont établi, les quantités  $V_0/V_{cyl}$  et  $L/R$  restent fixes. Trouver la stabilité du pont dynamique, c'est déterminer la valeur critique du débit ou du Weber à laquelle le pont se rompt, pour  $V_0/V_{cyl}$  et  $L/R$  fixés. On soumet le pont à un débit, en imposant la même vitesse  $u_s$  (profil plat) à l'entrée du premier tube et à la sortie du deuxième (figure 4.5, (b)). Le débit à l'entrée du tube d'entrée, qui traverse le pont, est exactement le même qui sort du second tube après la traversée du pont. Ainsi le volume du pont reste constant. La vitesse  $u_s$  est une fonction linéaire en temps, passant par l'origine des axes, avec une pente très faible, de façon à ce que son augmentation soit progressive jusqu'à la rupture du pont.

Le fait de commencer par une vitesse nulle et de l'augmenter linéairement en fonction du temps nous permet de ne pas faire de pulse dans l'écoulement. Un pulse dans l'écoulement conduirait à une perturbation drastique de l'interface qui va se mettre à osciller. Ces oscillations seront amplifiées par l'augmentation du débit et peuvent conduire au claquage du pont. La rupture serait due alors au pulse de la vitesse et non au fait qu'on a atteint le débit critique au delà duquel le pont devient instable. Pour chaque volume et rapport d'aspect fixés, il existe une valeur critique de la vitesse  $u_s$  au delà de laquelle le pont capillaire devient instable.

Si l'accélération en temps de la vitesse à travers le pont capillaire est trop grande, le pont se fragmentera à un débit supérieur au débit critique d'instabilité. Tout comme pour le cas statique nous avons effectué une série de calculs pour trouver l'accélération (maximale) de vitesse convenable pour que le pont reste quasi-statique. Une accélération maximale est nécessaire parce que plus elle est faible, moins vite on atteindra la vitesse critique d'instabilité, et dans ce cas on allonge le temps de calcul.

Rapports d'aspect	$L/R = 2$	$L/R = 3$	$L/R = 4$	$L/R = 5$
Volumes $V_0/V_{cyl}$	0.53417	0.6253	0.6720	0.7745
	0.62714	0.6876	0.7187	0.8495
	0.72014	0.7500	0.7655	0.8870
	0.76665	0.8124	0.8122	0.9434
	0.81318	0.8436	0.8590	0.9434
	0.85972	0.8748	0.9058	
	0.90628	0.9373	0.9292	
	0.95286	0.9686	0.9527	

TABLE 4.1 – Table des données : les paramètres de nos simulations sur la pont capillaire dynamique sont regroupés dans ce tableau. Les simulations ont été faites pour 4 différents rapports d'aspect  $L/R$ . Pour chaque rapport d'aspect, des calculs ont été effectués sur 5 à 8 volumes  $V_0/V_{cyl}$ .

## 4.4 Résultats

Plusieurs calculs ont été effectués pour différentes valeurs du rapport d'aspect,  $L/R = 2, 3, 4, 5$ , ces données sont rassemblées sur le tableau de valeurs (table 5.1). Pour chacun de ces rapports d'aspect plusieurs valeurs du rapport de volumes ( $0 < V_0/V_{cyl} \leq 1$ ) seront étudiées. On dressera ainsi pour chaque rapport d'aspect et de volumes, le diagramme de stabilité. Les diagrammes de stabilité (évolution du rayon du cou en fonction du nombre de Weber) obtenus pour différents rapports d'aspect sont présentés sur les figures 4.6 et 4.7.

Pour un rapport d'aspect fixé, on remarque que plus le volume  $V_0/V_{cyl}$  du pont est grand, plus le nombre de Weber critique au delà duquel le pont devient instable est grand. Inversement, pour un volume fixé, plus le rapport d'aspect est petit, plus le Weber critique de fragmentation sera grand. L'introduction de débit dans le pont capillaire montre plusieurs phénomènes différents. On note sur ces différents graphiques l'existence de trois régimes importants. Nous avons résumé, de façon schématique ces différents régimes sur la figure 4.8.

$V_0/V_{cyl} \leq 0.8$  : à l'instant initial ( $We = 0$ ) le cou du pont capillaire est au milieu du pont. En fonction de l'augmentation du nombre de Weber, le rayon du cou du pont décroît progressivement et de façon quasi-statique. Si on suit la trace de l'abscisse correspondant au cou, on s'aperçoit que le cou se déplace vers l'avant, dans la même direction que l'écoulement dans le pont. C'est le cas du volume  $V_1$  sur la

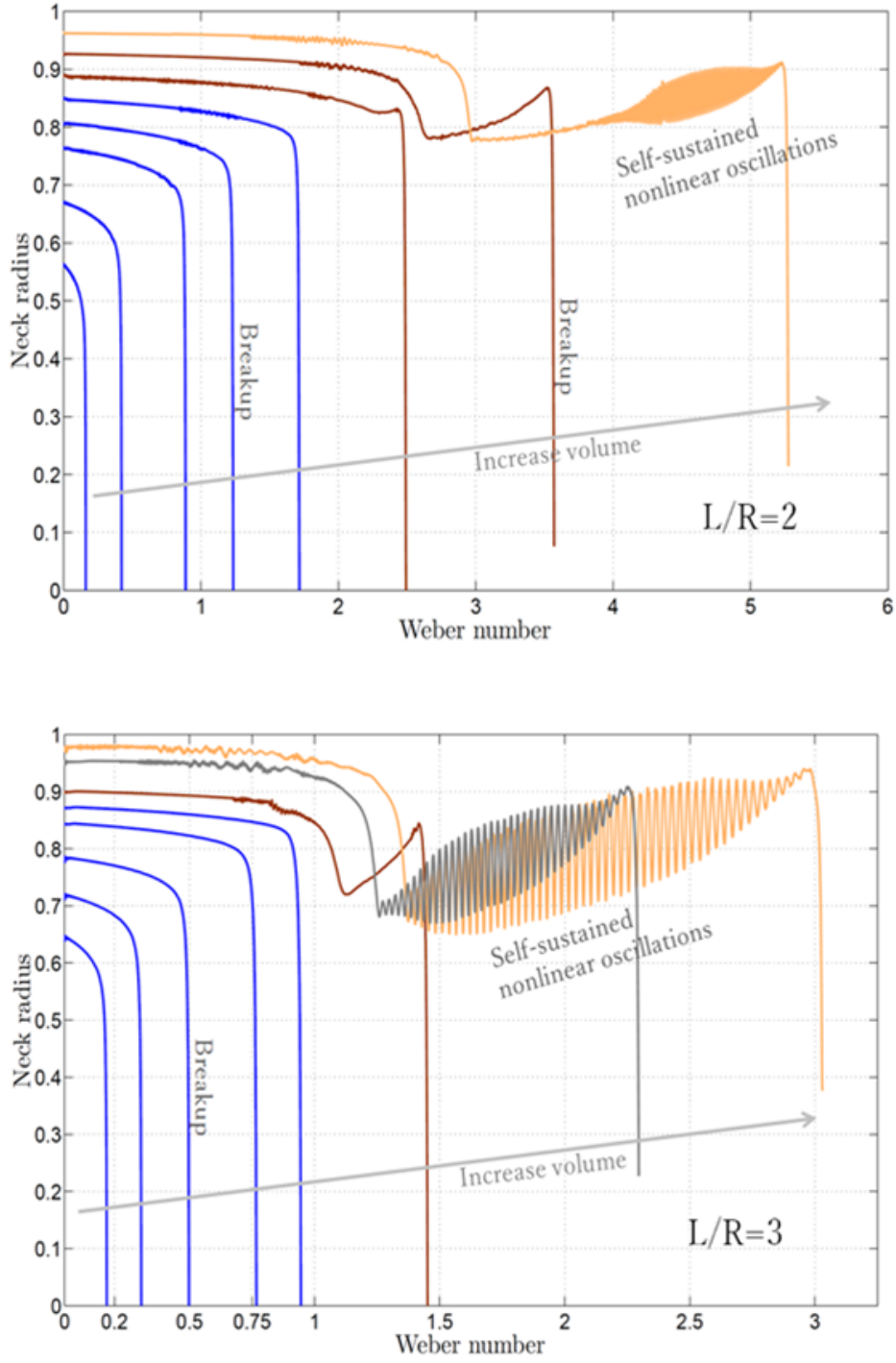


FIGURE 4.6 – Données du Table 5.1,  $L/R = 2$  en haut et  $L/R = 3$  en bas.

figure 4.8, et l'évolution temporelle de l'interface du pont 4.8 (a). La décroissance reste progressive jusqu'à la valeur critique du Weber où le pont devient instable et se rompt. La rupture du pont se traduit sur le diagramme par la chute brutale du rayon du cou vers zéro. Notons que si le rapport d'aspect du pont est assez grand ( $L/R \geq 2\pi$ ), le

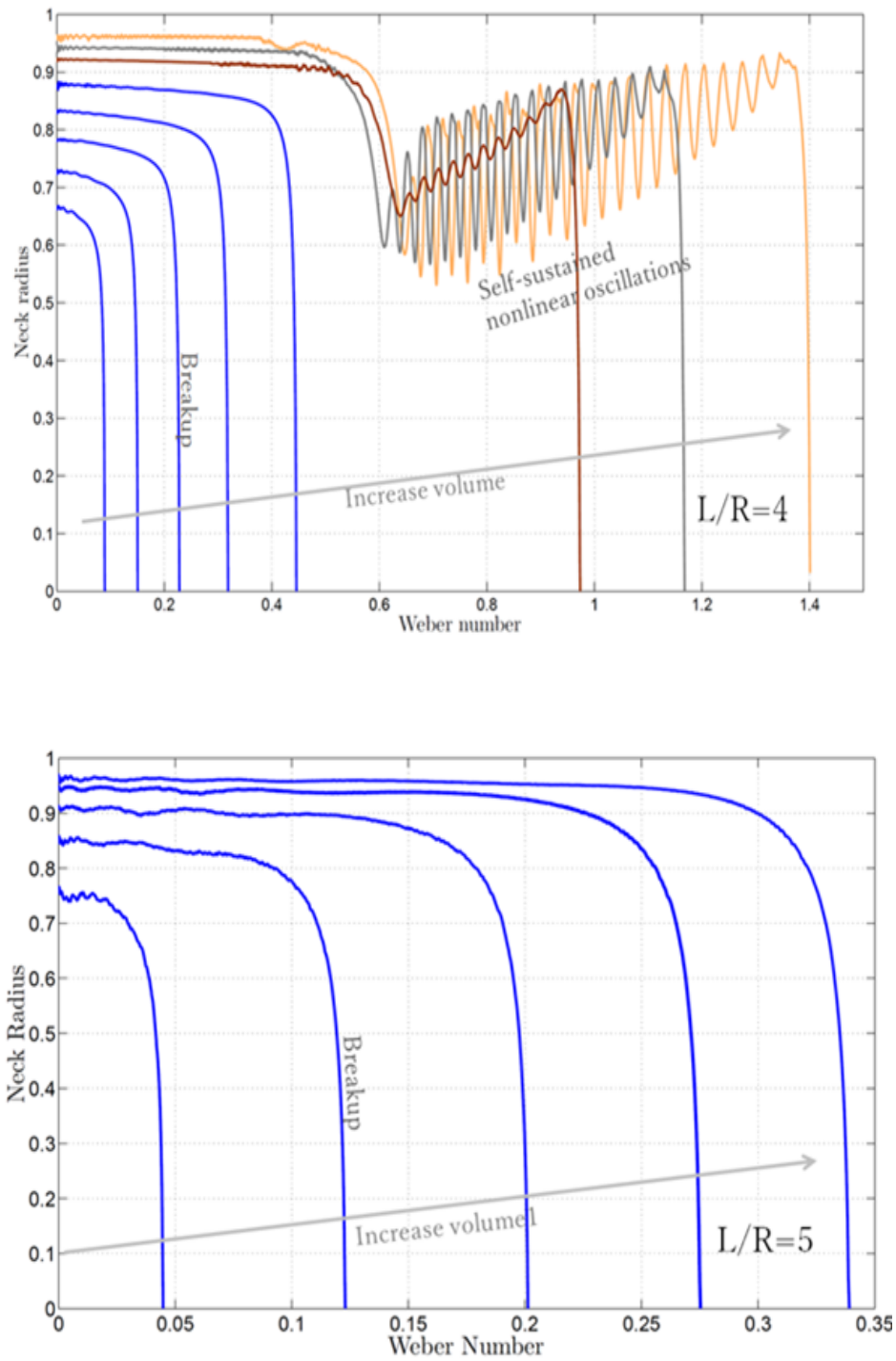


FIGURE 4.7 – Données du Table 5.1,  $L/R = 4$  en haut et  $L/R = 5$  en bas.

pont se retrouve en situation d'instabilité de Rayleigh-Plateau, et donc instable, même à Weber nul. Par suite le cou du pont reste toujours au milieu du pont, pour se rompre par l'instabilité de Rayleigh-Plateau.

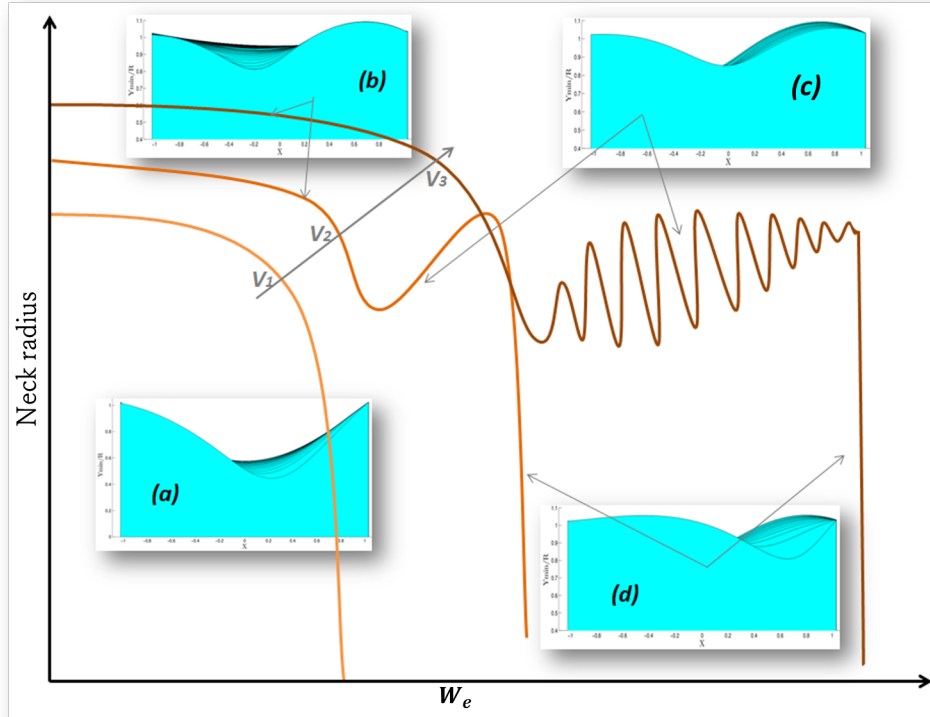


FIGURE 4.8 – Résumé graphique des différents comportements du pont capillaire dynamique. Description schématique de l'évolution du rayon du cou en fonction du nombre de Weber, de trois volumes représentatifs ( $V_1, V_2, V_3$ ). Les séquences temporelles des interfaces du pont sont issues des nos simulations.

$0.8 \leq V_0/V_{cyl} \leq 0.9$  : dans ce régime intermédiaire, le cou enregistre dans un premier temps une décroissance monotone en fonction de l'augmentation progressive du nombre de Weber. Mais inversement à ce que l'on a observé dans le régime précédent, le cou du pont capillaire se déplace étonnamment, en amont du système, en direction contraire à l'écoulement dans le pont, pour une gamme de nombres de Weber (cas du  $V_2$ , figure 4.8, évolution temporelle de l'interface du pont **(b)**). Par la suite le rayon du cou passe par un minimum local, correspondant à l'arrêt de son déplacement en amont. Après le passage par le minimum local, lorsqu'on continue toujours par augmenter le Weber, le cou commence par croître jusqu'à la valeur critique de fragmentation (figure 4.8, évolution temporelle de l'interface du pont **(c)** et **(d)**). La trace du cou pendant cette phase de croissance du rayon du cou correspond à son déplacement en aval du pont dans le sens de l'écoulement.

$V_0/V_{cyl} \geq 0.9$  : pour des volumes proches de 1 (le cylindre liquide), l'évolution du cou en fonction du Weber est qualitativement la même que dans le régime intermédiaire. Mais pendant la phase de croissance du rayon du cou, le pont passe par une oscillation non-linéaire auto-entretenu pendant une plage de Weber avant de se rompre. L'amplitude de cette oscillation va grandir au cours de l'augmentation du Weber, puis va s'atténuer proche du Weber critique pour presque se stabiliser avant d'amorcer la décroissance rapide vers la fragmentation (cas du  $V_3$ , figure 4.8, évolution temporelle de l'interface du pont (b), (c) et (d)).

## 4.5 Évolution de la frontière d'instabilité dans le cas dynamique

Nous avons dressé un peu plus tôt (paragraphe 4.3.1), dans le cas  $B_o = 0$ , le diagramme de stabilité du pont capillaire. Dans cette section nous allons déterminer comment varie cette frontière entre le pont stable/instable lorsqu'on introduit du débit (le cas dynamique). À partir des diagrammes précédents (4.6 et 4.7) nous pouvons dresser l'évolution de cette frontière pour différents Weber. D'une manière intuitive, pour un rapport d'aspect  $L/R$  et un débit donnés, plus le volume  $V_0/V_{cyl}$  dans le pont devient petit, plus le pont sera instable. Puisque l'introduction du débit va jouer un rôle déstabilisant. C'est ce que confirme la figure 4.9, (b). Il faut par exemple, dans le cas  $L/R = 3$ , un minimum de volume  $V_0/V_{cyl} = 0.46$  pour être stable dans le cas statique ( $We = 0$ ), alors qu'il faut environ  $V_0/V_{cyl} = 0.8$  pour  $We = 0.69$  dans le cas dynamique. Pour les comparaisons, nous utilisons ici le graphique de Lowry [32] comme référence, car seul le cas statique nous intéresse ici, et que le graphique de [32] est plus dégagé. Pour 7 valeurs différentes du Weber, nous avons tracé l'évolution la frontière de stabilité. Rappelons que pour une courbe de stabilité dans le repère  $(V_0/V_{cyl}, L/R)$  ou  $(V_0/V_{cyl}, We)$ , le pont est instable au dessus de la courbe et stable en dessous. Avant l'apparition des premières oscillations, on remarque que les frontières de stabilités lorsque  $We > 0$ , conservent la même forme et sont presque des transposées en volumes du cas statique ( $We = 0$ ). Ceci n'est qu'une interprétation de nos observations (figure 4.9, (b)), il convient de faire des calculs théoriques pour les confirmer.

Il est également possible de représenter sur cette carte, les zones d'oscillations non linéaires lorsque le volume du pont est proche du cylindre liquide. Pour cela il nous suffit de repérer les deux Weber critiques : le premier correspond au début des oscillations et le deuxième, à la fragmentation du pont après les oscillations. Considérons par exemple le cas  $L/R = 3$  : la zone d'oscillation du pont capillaire est délimitée par



$0.825 \leq V_0/V_{cyl} \leq 1$  et  $1 \leq We \leq 5.8$  (figure 4.9, (a)). Pour  $V_0/V_{cyl} = 1$  par exemple, les Webers critiques du début des oscillations et de fragmentation sont respectivement  $We_{c1} = 1.5$  et  $We_{c2} = 4.8$  (figure 4.9, (a)).

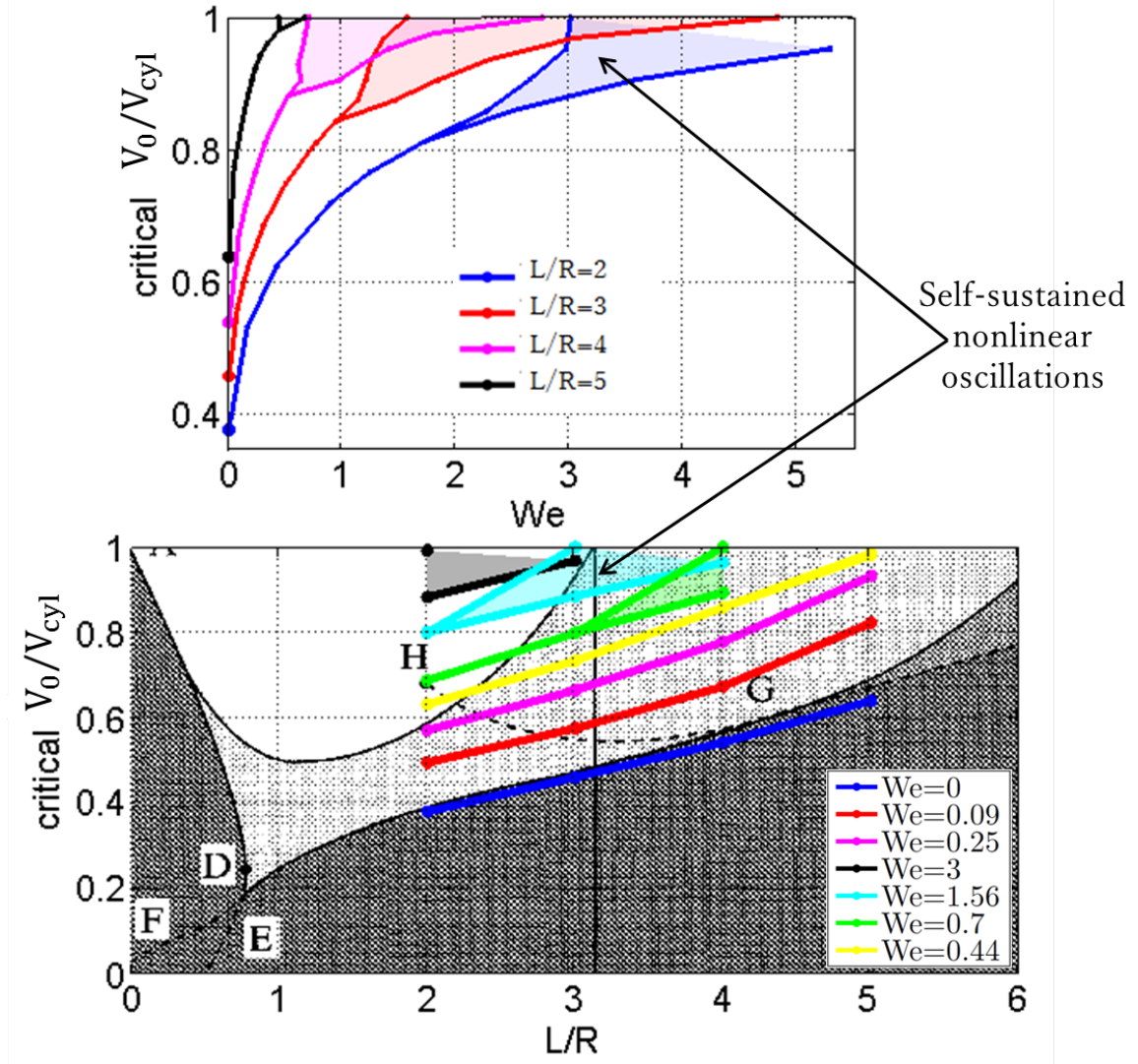


FIGURE 4.9 – Évolution de la frontière d'instabilité lorsqu'on augmente le débit dans le pont. Apparition de la zone d'oscillation lorsque le débit dans le pont est assez grand.

## 4.6 Études expérimentales

Les observations décrites jusqu'alors sont obtenues par simulations numériques des équations de Navier-Stokes en axisymétrie. Dans le but de confirmer nos résultats, pour rendre tangibles nos observations, nous avons effectué des études expérimentales

sur le pont capillaire.

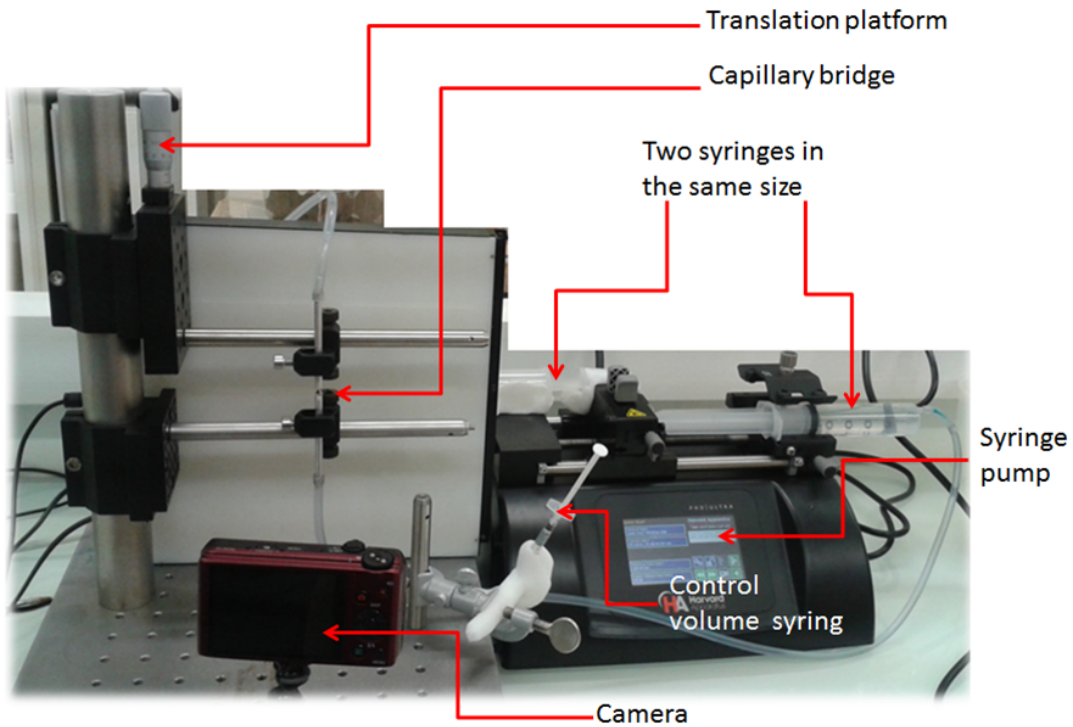


FIGURE 4.10 – Dispositif expérimental pour étudier la stabilité du pont capillaire statique.

#### 4.6.1 Dispositif expérimental

Une photo annotée du dispositif expérimental est présentée sur la figure 4.10 ci dessous. Nous disposons d'un pousse-seringue (Harvard Apparatus) avec lequel on peut choisir le débit à imposer dans le pont capillaire. Il est également possible de choisir un débit linéairement croissant en temps ou sous forme de créneaux. L'appareil dispose également des fonctions "Pump/withdraw" pour aspirer ou propulser le liquide à travers les seringues connectées. Nous y avons fixé dans notre cas, deux seringues de 50ml. La première à l'avant et la seconde à l'arrière dans le sens inverse, de telle façon que le piston de chariot de l'appareil, sert en même temps à pousser la seringue fixée à l'arrière, qu'à tirer sur celle fixée à l'avant. On assure ainsi par ce système, le même débit par propulsion/pompage dans les deux seringues. Ces deux seringues sont reliées aux deux tubes du pont capillaire, grâce à des tubes en plastique de 3mm à 5mm de diamètre interne. Les tubes du pont sont soit en plastique soit en aluminium

(comme c'est le cas sur l'image 4.10). Pour chaque tube, nous avons usiné nous-mêmes le bout en contact avec le pont capillaire (en le limant) de façon à ce qu'il ne présente plus de diamètre extérieur. Ceci pour éviter que le pont ne se repose sur l'épaisseur du tube, mais aussi pour s'assurer que les angles de contacts soient les mêmes pour les deux tubes. Nous disposons également d'une lumière de fond *backlight* pour éclairer le système et d'une caméra rapide pour filmer.

Les deux tubes sont fixés à deux barres horizontales, l'une fixe (celle en bas) et l'autre mobile grâce à une plateforme de translation. Les deux tubes sont placés face à face, et sur la verticale. La plateforme de translation nous permet de varier la distance entre les deux tubes, donc le rapport d'aspect du pont. Nous avons également planté une seringue de 5ml dans l'un des tubes en plastique, que nous avons nommé *seringue de contrôle*, remplie d'eau. Nous nous en servons pour diminuer ou à augmenter le volume de fluide dans le système : elle nous permet donc de varier le volume du pont capillaire pour un débit fixé.

Une fois mis en place le dispositif, le protocole est le suivant :

- dans le cas statique, nous fixons en premier lieu, le rapport d'aspect du pont grâce à la plateforme de translation, puis à l'aide de la seringue de contrôle nous allons pomper, de façon quasi-statique, du liquide au système, jusqu'au claquage du pont. Pour des raisons de stabilité nous partons initialement d'un pont de forme bombée,  $V_0/V_{cyl} > 1$ .
- dans le cas dynamique, nous fixons le rapport d'aspect, imposons le débit grâce au pousse-seringue, toujours en commençant par un volume  $V_0/V_{cyl} > 1$  et en utilisant la seringue de contrôle pour stabiliser le pont, puis commençons par pomper le pont jusqu'au claquage.

## 4.6.2 Résultats

Dans tous ce qui suit nous allons travailler avec de l'eau ( $\rho = 998kg.m^{-3}$ ,  $\sigma = 72mN.m^{-1}$ ,  $g = 9.81m.s^{-2}$ ), dans des températures ambiantes d'environ 20 degré, avec  $g$  la gravité,  $\sigma$  la tension de surface et  $\rho$  la masse volumique. Il faut donc tenir compte, en plus du rapport d'aspect  $L/R$  et du volume  $V_0/V_{cyl}$ , du nombre de Bond :

$$B_o = \frac{|\Delta\rho|gR^2}{\sigma},$$

avec  $R$  le rayon intérieur des tubes,  $|\Delta\rho| \simeq 997kg.m^{-3}$  le saut de densité entre l'air et l'eau. La seule variable ici sur laquelle nous allons jouer pour varier le nombre de Bond, dans ce cas, sera le rayon des tubes. Il peut y avoir également quelques variations sur la valeur de la tension de surface de l'eau du robinet qui n'est pas totalement pure.

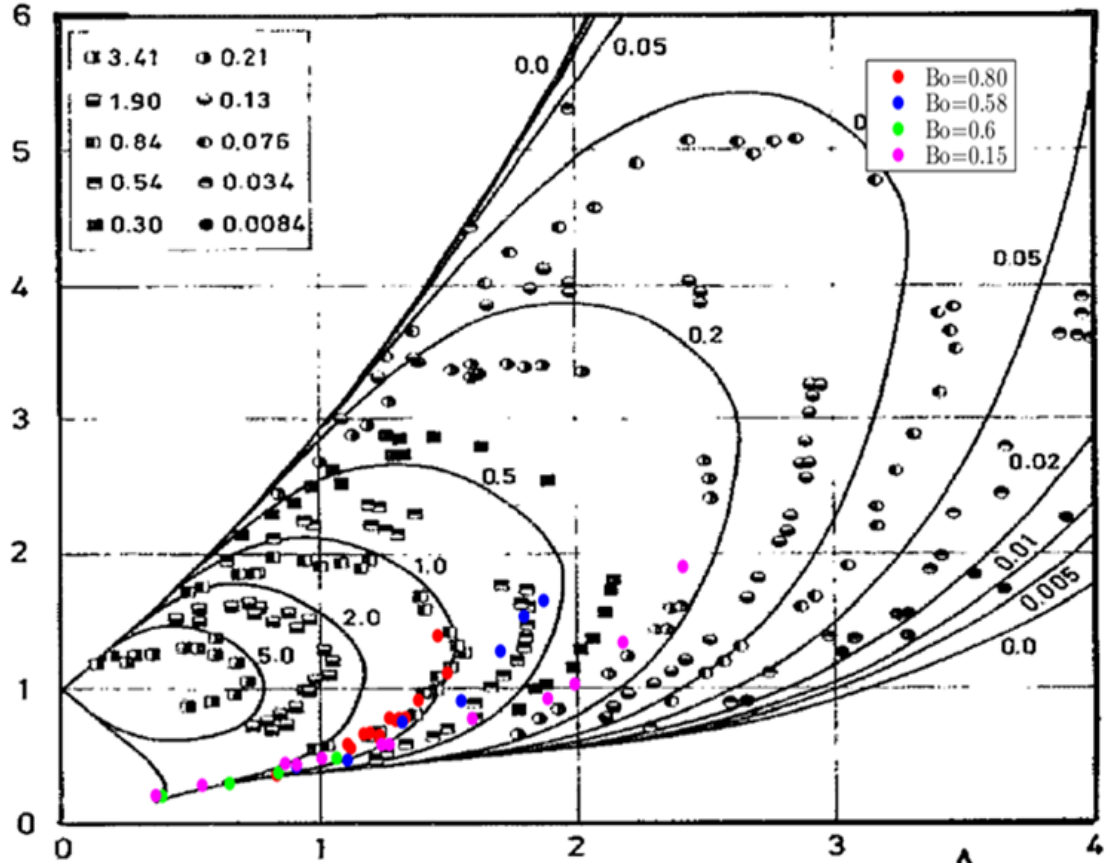


FIGURE 4.11 – Cas statique : comparaison avec les expériences de Slobozhanin [61], pour 4 nombres de Bond différents. De meilleurs accords sont obtenus pour les plus grands nombres de Bond.

Les résultats pour le cas statique ( $W_e = 0$ ) sont représentés sur la figure 4.11, pour différents nombre de Bond. Nous avons représenté nos données (en couleurs), par dessus ceux de Slobozhanin [61] pour 4 nombres de Bond différents. Les comparaisons montrent une meilleur adéquation pour les grandes valeurs du nombre de Bond. En effet, la valeur de la tension de surface de l'eau varie pendant nos expériences. Nous la mesurons deux fois, avant et après l'expérience et nous prenons la moyenne de ces deux valeurs. Mais la variation du nombre de Bond vient surtout du rayon du tube. Ainsi, les plus petites valeurs de Bond correspondent aux tubes de rayons plus petits, notamment le cas  $B_o = 0.15$  correspond à un tube de rayon  $1\text{mm}$  et  $\sigma = 65\text{mN.m}^{-1}$ . Dans ces cas là, l'usinage du bout des tubes manque de précision, de même que le pompage quasi-statique du pont, étant donné que le volume  $V_0$  du pont est très petit. Ceci explique le décalage entre nos résultats et ceux de [61] pour la plus petite valeur du nombre de Bond.

## Cas dynamique

Le dispositif expérimental a été modifié pour le cas dynamique pour raison de débit limité avec notre pousse-seringue. Celui-ci est remplacé par un système hydraulique constitué de deux grands bassins d'eau placés verticalement à une distance d'environ  $2m$  l'un de l'autre. Le système du pont capillaire est implanté entre ces deux bassins grâce aux tubes de liaison en plastique. Le bassin d'en haut fait objet de source d'eau et celui d'en bas, de récupération. Le débit dans le pont est donc régi par la différence de hauteur (la pression hydrostatique) entre le niveau d'eau dans le bassin supérieur et celui dans le bassin inférieur, la taille des tubes de liaison en plastique, mais aussi par un cadran de contrôle (pour pincer/ouvrir les tubes de liaison) fixé entre le bassin supérieur et le pont. Nous avons également fixé un deuxième cadran entre le pont et le bassin inférieur avec lequel nous pouvons ajuster les débits pour le rendre constant dans le système : le débit est constant lorsque le volume du pont est constant. Par rapport au système précédent, les seringues sont donc remplacées par les bassins, le débit est contrôlé par le cadran supérieur et le cadran inférieur jouera le rôle de la *seringue de contrôle*. Le protocole expérimental reste le même.

La figure 4.12 montre l'évolution de la frontière d'instabilité (dans le cas dynamique), obtenue expérimentalement, pour deux nombres de Bond différents. Qualitativement, ces courbes confirment nos résultats numériques. Quelques comparaisons seront présentées dans la prochaine section. Nous avons choisi ici d'utiliser le graphique de Slozhanin [61] car il contient également ses données expérimentales. Cela nous permet, de comparer nos résultats expérimentaux dans le cas statique, pour les deux nombres de Bond non nuls. Pour ces deux valeurs du nombre de Bond ( $Bo = 0.3, 0.56$ ), nos frontières de stabilité (pour  $We = 0$ , en rouge) coïncident bien avec celles obtenues par [61] (se référer au graphique complet de la figure 4.11 pour les légendes).

Chaque point du graphique correspond à une expérience donnée. Pour tracer les courbes de stabilité de la figure 4.12, nous avons, à débit fixe, varié le rapport d'aspect du pont pour chaque expérience. Les débits sont mesurés d'une manière simple, à l'aide d'un chronomètre, d'une éprouvette graduée et d'un pèse-poids. Pour déterminer le volume critique de claquage du pont, nous avons filmé chaque expérience à la caméra rapide. Ensuite, avec le logiciel *ImageJ*, nous repérons la dernière image stable du pont avant son claquage. Puis nous calculons le volume du pont par le théorème de Gulding (voir le lien Wikipédia). Toutes ces techniques de prise de mesures et d'images nous permettent de mettre des barres d'erreurs sur nos résultats expérimentaux.

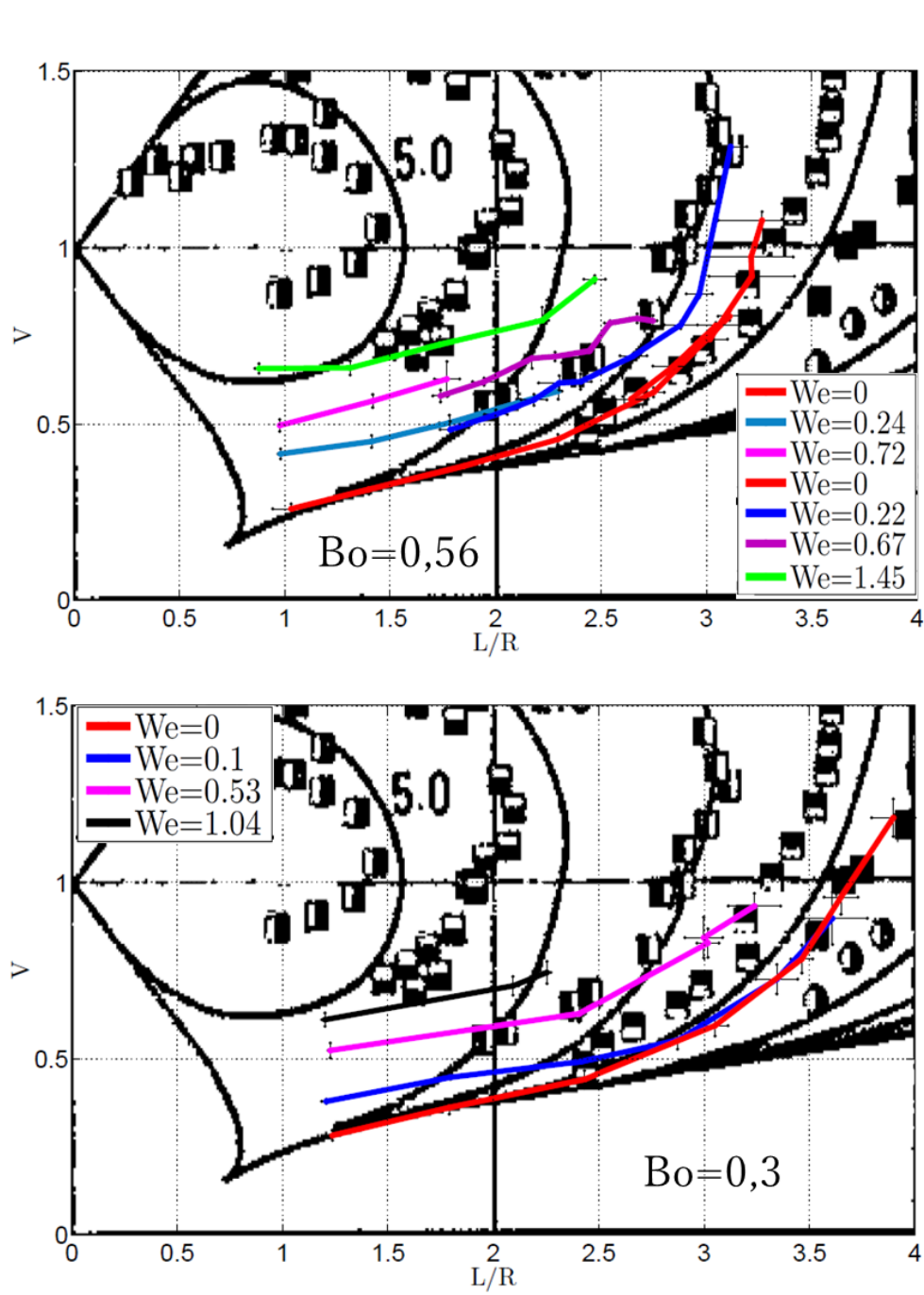


FIGURE 4.12 – Cas dynamique : évolution de la frontière d'instabilité en fonction du débit dans le pont, pour deux nombres de Bond différents,  $Bo = 0.56$  en haut et  $Bo = 0.30$  en bas. Les frontières d'instabilité, dans les cas statiques ( $We = 0$ ), sont en parfait accord avec Slobozhanin [61].

### 4.6.3 Comparaisons expériences/simulations

L'un des objectifs de nos expériences sur le pont capillaire est de retrouver ce comportement d'oscillations non linéaires dans le cas dynamique. Nous avons également cherché à comparer nos diagrammes de stabilité numériquement établis. Mais cette comparaison peut être difficile à faire du moment où nous n'utilisons pas les mêmes approches techniques dans nos simulations et nos expériences. Rappelons que dans nos simulations numériques, l'étude de la stabilité se fait en fixant le volume du pont capillaire et en augmentant le débit de manière quasi-statique. Il s'agit donc de trouver pour un volume du pont fixé, le débit critique au delà duquel le pont devient instable : nous l'appellerons dorénavant *la méthode normale*. Inversement, dans le protocole expérimental du cas dynamique, on fixe en premier lieu le débit et on diminue progressivement le volume du pont jusqu'au claquage. Il s'agit alors de trouver, pour un débit fixé, le volume critique en dessous duquel le pont devient instable et claqué : on l'appellera *la méthode expérimentale*. Bien que l'objectif reste le même (trouver la frontière d'instabilité du pont en fonction du volume et du débit), ces deux méthodes ne sont pas exactement les mêmes. Pour mesurer dans quelles conditions nous pouvons comparer nos résultats (expériences/simulations), nous avons comparé des simulations pour le cas type ( $B_o = 0.55, L/R = 2$ ), en utilisant, et *la méthode expérimentale*, et *la méthode normale*.

La figure 4.13, **(a)** montre la comparaison de ces deux méthodes. Nous avons effectué deux simulations en utilisant la *méthode expérimentale*, c'est à dire en fixant le débit dans le pont et ensuite faire décroître progressivement son volume jusqu'au claquage. Nous avons choisi deux débits différents pour varier progressivement le volume dans le pont (figure 4.13, **(a)**).  $U$  représente la vitesse de pompage et  $U_c = \sqrt{\sigma/\rho R}$ , la vitesse capillaire.

On voit qu'en diminuant le débit de pompage du pont, la frontière d'instabilité obtenue par la méthode du débit fixe (*méthode expérimentale*), tend vers celle obtenue par *la méthode normale*. Il est donc important que le débit de pompage dans nos expériences soit le plus petit possible. Même s'il nous a été impossible de remonter à la valeur exacte de ce débit lors de nos expériences, la comparaison des résultats expérimentaux avec les résultats numériques pour  $L/R = 2$  par la *méthode normale*, montre un très bon accord (voir la figure 4.13, **(b)**). Nous avons tracé la frontière d'instabilité pour différentes valeurs du rapport d'aspect  $L/R = 1.82, 1.88, 2.3, 2.2, 2.4$ . Seule la courbe en couleur grise ( $L/R = 2$ ), correspond aux résultats numériques. Et celle-ci se retrouve bien entre les courbes expérimentales  $L/R = 1.8$  et  $L/R = 2.3$ .

L'autre résultat le plus pertinent de nos expériences est l'observation des différents



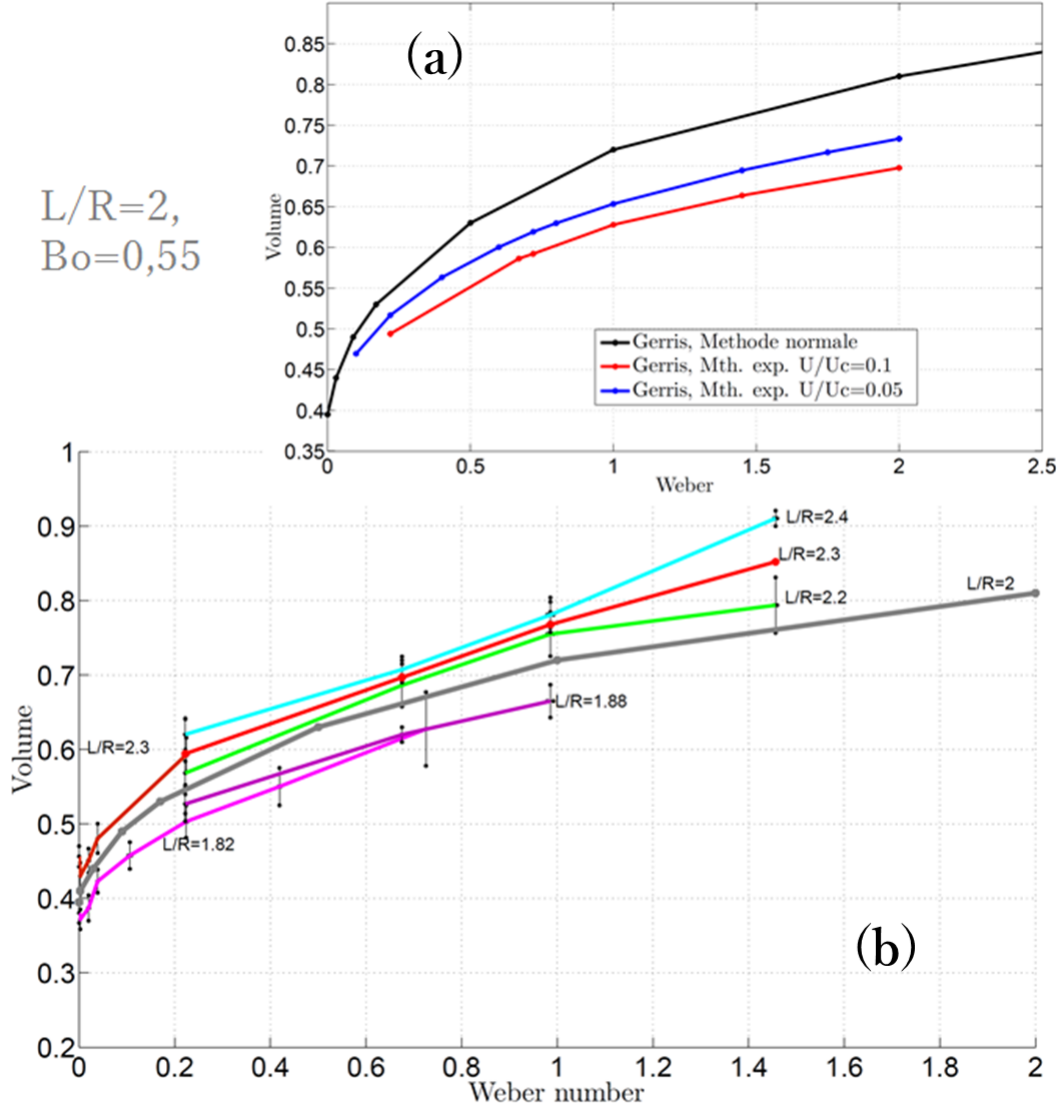


FIGURE 4.13 – (a) : évaluation de la courbe de stabilité du pont capillaire (par simulations numériques) par deux méthodes différentes, la méthode normale et la méthode expérimentale. À débit faible, ces deux méthodes prédisent la même frontière de stabilité. (b) : Comparaison simulations/expériences pour  $Bo = 0.55$ . La frontière d'instabilité numérique (simulation Gerris (méthode normale),  $L/R = 2$  en gris), se trouve bien encadrée par celles obtenues expérimentalement.



comportements décrits plus tôt, dans nos simulations, pour le cas dynamique, à savoir un claquage immédiat pour des volumes faibles et des oscillations non linéaires pour des volumes proches du cylindre liquide. Nous ne présentons ici que quelques captures de nos expériences (voir figure 4.14), montrant ces différents comportements. Un support matériel contenant diverses vidéos sera fourni en plus de ce document pour montrer beaucoup plus de phénomènes observés dans nos expériences.

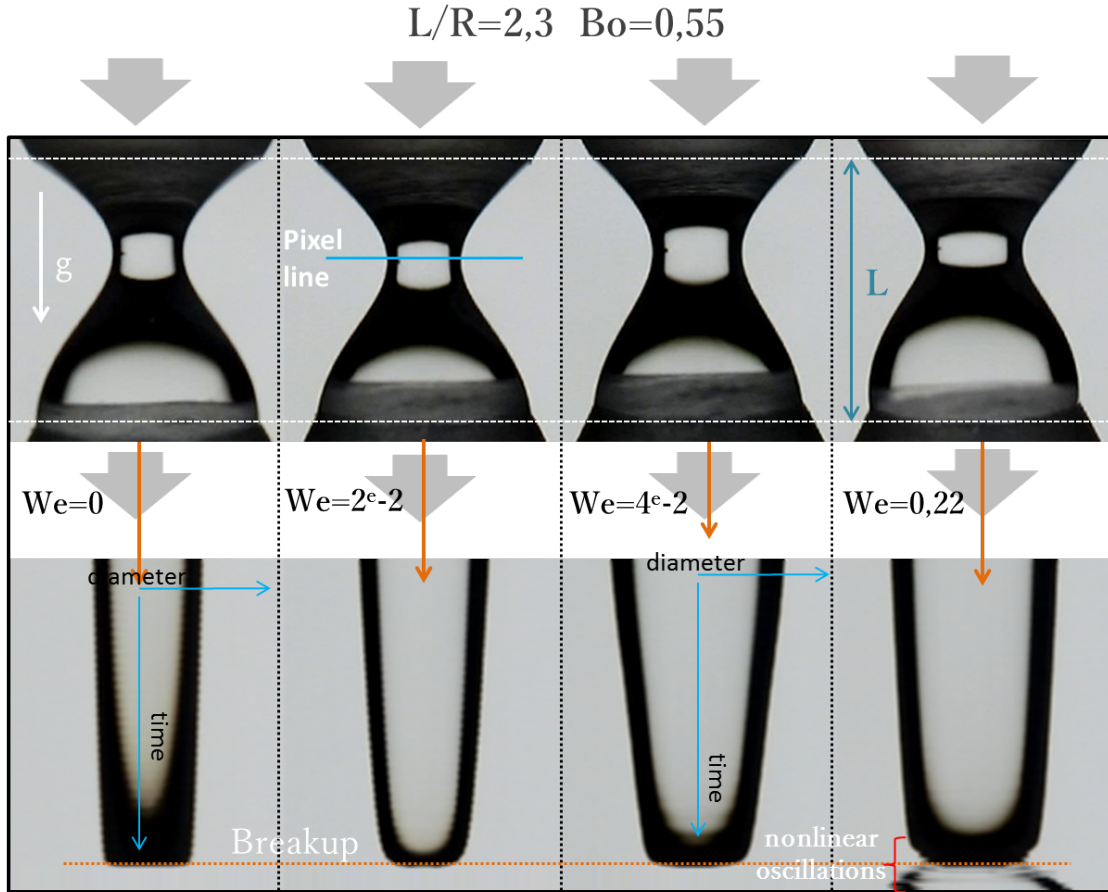


FIGURE 4.14 – Évolution d’une ligne de pixel, représentant le diamètre du cou, en temps pour différents Weber, ( $L/R = 2.3$ ,  $Bo = 0.55$ ). Apparition des oscillations non linéaires lorsque  $We > 0.22$ .

Sur la figure 4.14, nous présentons une concaténation d’une série de quatre expériences pour le cas  $L/R = 2.3$ ,  $Bo = 0.55$ . La première ligne de l’image représente un visuel, pour un instant donné, de ces quatre expériences correspondant à quatre débits différents. Pour mesurer la décroissance du diamètre du pont nous avons utilisé la fonction *Reslic* du logiciel *ImageJ* qui permet : à partir d’une séquence d’images, de sélectionner une ligne pixel sur celle-ci et de dresser son évolution temporelle. On peut

ainsi visualiser l'évolution du diamètre du pont capillaire en temps, en sélectionnant sur notre vidéo la ligne pixel correspondant au cou du pont, et visionner sa décroissance en temps grâce à cette fonction *Reslic*. Celles-ci sont représentées sur la deuxième ligne de l'image 4.14. Chaque colonne représente donc le visuel du pont (première ligne) et l'évolution temporelle de son cou (deuxième ligne). L'échelle de temps est orientée vers le bas. Nous avons synchronisé nos vidéos pour avoir le même temps de claquage.

De la gauche vers la droite de l'image 4.14, on augmente le débit dans le pont. Nous observons que pour les trois premiers nombres de Weber, lors de la décroissance du volume (selon *la méthode expérimentale*), le claquage du pont est immédiat. Par contre pour le dernier nombre de Weber,  $We = 0.22$ , on peut remarquer que le cou, à la place du claquage immédiat, subit des oscillations non linéaires. Ce qui montre clairement, qu'ayant fixé le rapport d'aspect  $L/R = 2.3$ , il existe un débit critique au delà duquel le pont subit des oscillations non linéaires avant de claquer, lorsque le volume du pont est proche du cylindre liquide.

L'étude expérimentale du pont capillaire dynamique est très riche. Nous n'avons présenté ici que quelques résultats de nos observations. Il reste encore beaucoup à explorer, notamment la variation de l'angle de contact, le pont capillaire entre deux tubes de diamètres différents. Malheureusement nous n'avons pas eu le temps de mener d'avantage d'investigations, mais ces comparaisons préliminaires nous encouragent beaucoup à continuer les recherches.

## 4.7 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons dressé le diagramme de stabilité du pont capillaire, dans deux cas différents : le cas statique et le cas dynamique. Dans le cas statique, nous avons validé nos résultats numériques par comparaison avec les résultats théoriques de la littérature [61]. Dans le cas dynamique, nous rajoutons un nouveau paramètre à l'étude du cas statique, qui est le débit. Nous avons alors mis en évidence plusieurs types de comportements : le claquage immédiat et les oscillations non linéaires. Ces observations nous ont conduit à mener des études expérimentales sur le pont capillaire, qui ont confirmé (qualitativement) nos observations numériques.

Dans le cas statique nous nous sommes limités à quelques nombres de Bond et surtout au cas de Venturi capillaire ( $V_0/V_{cyl} < 1$ ) pour effectuer nos comparaisons avec les expériences de Slobozhanin [61]. Ces comparaisons ont montré de très bons accords pour des nombres de Bonds élevés ( $Bo \geq 0.6$ ). Nous avons également retrouvé expérimentalement nos différents comportements mis en évidence par nos simulations

dans le cas dynamique.

Dans le chapitre suivant, nous continuerons nos études sur le pont capillaire en dressant des diagrammes de bifurcation pour le modèle 1D des équations de Navier-Stokes ([16], 1994) pour le pont capillaire et les comparés à nos simulations numériques.

- [1] ANTKOWIAK, A., BREMOND, N., LE DIZES, S., AND VILLERMAUX, E. Short-term dynamics of a density interface following an impact. *Journal of Fluid Mechanics* 577 (2007), 241–250.
- [2] AULISA, E., MANSERVISI, S., SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Interface reconstruction with least-squares fit and split advection in three-dimensional cartesian geometry. *Journal of Computational Physics* 225, 2 (2007), 2301–2319.
- [3] BAYVEL, L., AND ORZECOWSKI, Z. Liquid atomization, combustion : An international series, 1993.
- [4] BELL, J. B., AND MARCUS, D. L. A second-order projection method for variable-density flows. *Journal of Computational Physics* 101, 2 (1992), 334–348.
- [5] BLANCHARD, D. C., AND HEINRICH, B. C. *From raindrops to volcanoes*. Doubleday Garden City, NY, 1967.
- [6] BRACKBILL, J., KOTHE, D. B., AND ZEMACH, C. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of computational physics* 100, 2 (1992), 335–354.
- [7] BREMOND, N. *Stabilité et atomisation des nappes liquides*. PhD thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I, 2003.
- [8] BRENNER, M. P., AND GUEYFFIER, D. On the bursting of viscous films. *Physics of Fluids* 11 (1999), 737–739.
- [9] CASTREJÓN-PITA, A. A., CASTREJON-PITA, J., AND HUTCHINGS, I. Breakup of liquid filaments. *Physical review letters* 108, 7 (2012), 074506.
- [10] CHORIN, A. J. On the convergence of discrete approximations to the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation* 23, 106 (1969), 341–353.

- [11] CONRATH, M., CANFIELD, P., BRONOWICKI, P., DREYER, M. E., WEISLOGEL, M. M., AND GRAH, A. Capillary channel flow experiments aboard the international space station. *Physical Review E* 88, 6 (2013), 063009.
- [12] CULICK, F. Comments on a ruptured soap film. *Journal of applied physics* 31, 6 (1960), 1128–1129.
- [13] DE LA GRANGE, J. L. *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés : avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques*. Bachelier, 1826.
- [14] DRIESSEN, T., JEURISSEN, R., WIJSHOFF, H., TOSCHI, F., AND LOHSE, D. Stability of viscous long liquid filaments. *Physics of Fluids (1994-present)* 25, 6 (2013), 062109.
- [15] EGGERS, J. Universal pinching of 3d axisymmetric free-surface flow. *Physical Review Letters* 71, 21 (1993), 3458.
- [16] EGGERS, J., AND DUPONT, T. F. Drop formation in a one-dimensional approximation of the navier–stokes equation. *Journal of fluid mechanics* 262 (1994), 205–221.
- [17] FRANCOIS, M. M., CUMMINS, S. J., DENDY, E. D., KOTHE, D. B., SICILIAN, J. M., AND WILLIAMS, M. W. A balanced-force algorithm for continuous and sharp interfacial surface tension models within a volume tracking framework. *Journal of Computational Physics* 213, 1 (2006), 141–173.
- [18] GHABACHE, E., ANTKOWIAK, A., JOSSE RAND, C., AND SÉON, T. On the physics of fizziness : How bubble bursting controls droplets ejection. *Physics of Fluids (1994-present)* 26, 12 (2014), 121701.
- [19] GUEYFFIER, D., LI, J., NADIM, A., SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *Journal of Computational Physics* 152, 2 (1999), 423–456.
- [20] HARVIE, D. J., DAVIDSON, M., AND RUDMAN, M. An analysis of parasitic current generation in volume of fluid simulations. *Applied mathematical modelling* 30, 10 (2006), 1056–1066.
- [21] HOYT, J. W., AND TAYLOR, J. Waves on water jets. *Journal of Fluid Mechanics* 83, 01 (1977), 119–127.
- [22] JAMES, A., VUKASINOVIC, B., SMITH, M. K., AND GLEZER, A. Vibration-induced drop atomization and bursting. *Journal of Fluid Mechanics* 476 (2003), 1–28.

- [23] KELLER, H. Lectures on numerical methods in bifurcation problems. *Applied Mathematics* 217 (1987), 50.
- [24] KELLER, J. B. Breaking of liquid films and threads. *Physics of Fluids (1958-1988)* 26, 12 (1983), 3451–3453.
- [25] KELLER, J. B., AND MIKSIS, M. J. Surface tension driven flows. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 43, 2 (1983), 268–277.
- [26] KUBITSCHKE, J., AND WEIDMAN, P. Helical instability of a rotating liquid jet. *Physics of Fluids* 20, 9 (2008), 91104.
- [27] LAFAURIE, B., NARDONE, C., SCARDOVELLI, R., ZALESKI, S., AND ZANETTI, G. Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with surfer. *Journal of Computational Physics* 113, 1 (1994), 134–147.
- [28] LAPLACE, P. S. *Traité de mécanique céleste/par PS Laplace...; tome premier [-quatrième]*, vol. 4. de l’Imprimerie de Crapelet, 1805.
- [29] LHUISSIER, H., AND VILLERMAUX, E. Soap films burst like flapping flags. *Physical review letters* 103, 5 (2009), 054501.
- [30] LI, J. Calcul d’interface affine par morceaux. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, astronomie* 320, 8 (1995), 391–396.
- [31] LI, J. *Résolution numérique de l’équation de Navier-Stokes avec reconnection d’interfaces. Méthode de suivi de volume et application à l’atomisation*. PhD thesis, 1996.
- [32] LOWRY, B. J., AND STEEN, P. H. Stability of slender liquid bridges subjected to axial flows. *Journal of Fluid Mechanics* 330 (1997), 189–213.
- [33] MADDOCKS, J. H. Stability and folds. *Archive for Rational mechanics and Analysis* 99, 4 (1987), 301–328.
- [34] MARMOTTANT, P. *Atomisation d’un liquide par un courant gazeux*. PhD thesis, Grenoble, INPG, 2001.
- [35] MARTÍNEZ, I., AND PERALES, J. Liquid bridge stability data. *Journal of crystal growth* 78, 2 (1986), 369–378.
- [36] MESEGUER, J. The influence of axial microgravity on the breakage of axisymmetric slender liquid bridges. *Journal of crystal growth* 62, 3 (1983), 577–586.
- [37] M’KENDRICK, J. G. Helmholtz in berlin—physical researches continued [1].
- [38] MYSHKIS, A., BABSKII, V., KOPACHEVSKII, N., SLOBOZHANIN, L., TYUPTSOV, A., AND WADHWA, R. Low-gravity fluid mechanics. *Translated from the*

- Russian by Wadhwa, RS, XIX, 583 pp. 218 figs.. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1 (1987).*
- [39] NIKITOPOULOS, D. E., AND KELLY, A. J. Formation of a net-negative charged liquid spray. *Physics of Fluids (1994-present)* 12, 9 (2000), S7–S7.
  - [40] NOTZ, P. K., AND BASARAN, O. A. Dynamics and breakup of a contracting liquid filament. *Journal of Fluid Mechanics* 512 (2004), 223–256.
  - [41] PLATEAU, J. *Acad. Sci.*, vol. XVI. Bruxelles Mém., 1843.
  - [42] PLATEAU, J. *Acad. Sci.*, vol. XXIII. Bruxelles Mém., 1849.
  - [43] PLATEAU, J. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, vol. 2. Gauthier-Villars, 1873.
  - [44] POPINET, S. Gerris : a tree-based adaptive solver for the incompressible euler equations in complex geometries. *Journal of Computational Physics* 190, 2 (2003), 572–600.
  - [45] POPINET, S. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *Journal of Computational Physics* 228, 16 (2009), 5838–5866.
  - [46] POPINET, S., AND ZALESKI, S. A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 30, 6 (1999), 775–793.
  - [47] QUERE, D., DE GENNES, P., BROCHARD-WYART, F., AND REISINGER, A. Capillarity and wetting phenomena : Drops, bubbles, pearls, waves, 2004.
  - [48] RAYLEIGH, L. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proceedings of the London Mathematical Society* 1, 1 (1879), 57–72.
  - [49] RAYLEIGH, L. Some applications of photography. *Nature* 44, 1133 (1891), 249–254.
  - [50] RAYLEIGH, L. *Sci. Papers*, vol. I. 1899.
  - [51] RAYLEIGH, L. *Sci. Papers*, vol. III. 1902.
  - [52] RENARDY, Y., AND RENARDY, M. Prost : a parabolic reconstruction of surface tension for the volume-of-fluid method. *Journal of Computational Physics* 183, 2 (2002), 400–421.
  - [53] RIDER, W. J., AND KOTHE, D. B. Reconstructing volume tracking. *Journal of computational physics* 141, 2 (1998), 112–152.
  - [54] SAVART, F. Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Ann. Chim. Phys* 53, 337 (1833), 1833.

- [55] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annual review of fluid mechanics* 31, 1 (1999), 567–603.
- [56] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Analytical relations connecting linear interfaces and volume fractions in rectangular grids. *Journal of Computational Physics* 164, 1 (2000), 228–237.
- [57] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Interface reconstruction with least-square fit and split eulerian–lagrangian advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 41, 3 (2003), 251–274.
- [58] SCHULKES, R. The contraction of liquid filaments. *Journal of Fluid Mechanics* 309 (1996), 277–300.
- [59] SÉBILLEAU, J., LIMAT, L., AND EGGERS, J. Flow separation from a stationary meniscus. *Journal of Fluid Mechanics* 633 (2009), 137–145.
- [60] SIEROU, A., AND LISTER, J. R. Self-similar recoil of inviscid drops. *Physics of Fluids (1994-present)* 16, 5 (2004), 1379–1394.
- [61] SLOBOZHANIN, L. A., AND PERALES, J. M. Stability of liquid bridges between equal disks in an axial gravity field. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics (1989-1993)* 5, 6 (1993), 1305–1314.
- [62] STONE, H. A., AND LEAL, L. Relaxation and breakup of an initially extended drop in an otherwise quiescent fluid. *Journal of Fluid Mechanics* 198 (1989), 399–427.
- [63] SUSSMAN, M., ALMGREN, A. S., BELL, J. B., COLELLA, P., HOWELL, L. H., AND WELCOME, M. L. An adaptive level set approach for incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics* 148, 1 (1999), 81–124.
- [64] THOMSON, W. Hydrokinetic solutions and observations.(lord kelvin). In *Proc. Royal Soc* (1871), vol. 7, p. 63.
- [65] TIAHJADI, M., STONE, H., AND OTTINO, J. Satellite and subsatellite formation in capillary breakup. *Journal of Fluid Mechanics* 243 (1992), 297–317.
- [66] WEBER, C. Zum zerfall eines flüssigkeitsstrahles. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 11, 2 (1931), 136–154.
- [67] ZEFF, B. W., KLEBER, B., FINEBERG, J., AND LATHROP, D. P. Singularity dynamics in curvature collapse and jet eruption on a fluid surface. *Nature* 403, 6768 (2000), 401–404.





## CHAPITRE 5

# PONT CAPILLAIRE : DIAGRAMME DE BIFURCATION

### Sommaire

5.1	Introduction . . . . .	125
5.2	Les équations de Eggers & Dupont . . . . .	126
5.3	Étude générale d'un système dynamique . . . . .	127
5.4	La linéarisation des équations de Eggers & Dupont . . . .	132
5.5	Analyse de la stabilité . . . . .	134
5.6	La procédure numérique . . . . .	134
5.7	Résultats . . . . .	138
5.8	Conclusion . . . . .	145

## 5.1 Introduction

Le chapitre précédent a été consacré à l'étude de la stabilité du pont capillaire. Deux cas ont été étudiés : le cas statique et le cas dynamique. Dans le cas statique, nous avons validé nos résultats par des comparaisons avec les résultats théoriques de la littérature. Dans le cas dynamique, nous disposons de moins d'informations pour faire des comparaisons. Une piste pour valider nos observations est celle d'établir des diagrammes de bifurcations basés sur les équations 1D de Navier-Stokes [16] (1994).

Nous décrirons dans un premier temps la théorie de la bifurcation de façon générale, puis nous étudierons le cas du pont capillaire dans le cas 1D. Ensuite, nous effectuerons des comparaisons avec les résultats de nos simulations basées sur les équations complètes de Navier-Stokes du chapitre précédent.

## 5.2 Les équations de Eggers & Dupont

En 1994, Eggers & Dupont établissent les équations simplifiées de Navier-Stokes pour les ligaments allongés (c'est à dire de rapport d'aspect très grand,  $L \gg R$ ). Il s'agit de partir des équations complètes de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques, et d'utiliser le développement de Taylor sur la composante radiale  $r \ll L$  pour les simplifier.

Les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques pour une colonne liquide en axisymétrie s'écrivent :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right), \quad (5.1a)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - g, \quad (5.1b)$$

avec  $u_z$  et  $u_r$ , la vitesse axiale et la vitesse radiale le long du ligament liquide. L'équation de la continuité s'écrit dans ce cas :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0. \quad (5.2)$$

Aux équations précédentes il nous faut ajouter l'équilibre des forces normales de surface :

$$\mathbf{n} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{n} = -\sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (5.3)$$

et des forces tangentielles :

$$\mathbf{n} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{t} = 0, \quad (5.4)$$

avec  $\Sigma$  le tenseur des contraintes, et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure de l'interface,  $R_1$  et  $R_2$ , les rayons de courbures locaux de l'interface.

Et enfin la vitesse de l'interface est calculée par l'équation :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_z \frac{\partial h}{\partial z} = u_r|_{r=h}, \quad (5.5)$$

où  $h(z, t)$  est la composante radiale de l'interface.

En utilisant le développement limité en séries de Taylor par rapport à la composante radiale  $r$ , on obtient finalement les équations du modèle 1D de Eggers & Dupont [16] :

$$\partial_t u = -uu_z - \frac{p_z}{\rho} + \frac{3\nu(h^2 u_z)}{h^2} \quad (5.6a)$$

$$p = \sigma \left[ \frac{1}{h(1+h_z^2)} - \frac{h_{zz}}{(1+h_z^2)^{3/2}} \right] \quad (5.6b)$$

$$\partial_t h = -uh_z - \frac{1}{2}u_z h, \quad (5.6c)$$

où la notation  $u_z$  désigne la dérivée partielle de  $u$  par rapport à  $z$ ,  $p$  la pression de Laplace et  $\nu$  la viscosité cinématique du liquide (le lecteur pourra consulter l'article de [16] pour plus de détails sur l'établissement de ces équations).

Le système d'équations (5.6) est à résoudre pour  $z \in [0, L]$  ( $L$  la longueur du ligament) avec les conditions aux limites suivantes :

$$h(0) = h(L) = R_0, \quad (5.7a)$$

$$u(0) = u(L) = u_0. \quad (5.7b)$$

La conservation de masse est définie par l'équation :

$$V = \int_0^L h dz. \quad (5.8)$$

Les équations (5.6) avec les conditions limites (5.7) et la conservation de masse (5.8) constituent ce qu'on appelle un système dynamique. Pour dresser le diagramme de bifurcation d'un tel système, il nous faut déterminer tous ces points d'équilibre, mais d'abord, rappelons les points importants d'une étude générale d'un système dynamique.

## 5.3 Étude générale d'un système dynamique

Un système dynamique est un système physique classique dépendant du temps, causal et déterministe. Nous allons nous intéresser ici au cas du système, décrit par un vecteur d'état  $x \in \mathbb{R}^n$  dont l'évolution obéit à une loi de forme :

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad (5.9)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $\dot{x}$  sa dérivée temporelle,  $\lambda \in \mathbb{R}^p$  est un ensemble de paramètres scalaires et  $f$  une application de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Le type de système dynamique dépend alors des propriétés de  $f$  : par exemple on parlera de système dynamique linéaire ou non linéaire lorsque  $f$  est respectivement linéaire ou non linéaire. On considère ici que l'évolution de  $f$  en fonction du temps n'est pas nécessairement explicite. Dans notre cas, la variable d'état est  $x = (u, h)$  et  $f$  est décrite par les membres de droite des équations (5.6).

### 5.3.1 Les points d'équilibre : solutions statiques

Une solution statique (encore appelée point d'équilibre ou point fixe) est une solution stationnaire du système dynamique (5.9), c'est à dire une solution indépendante du temps, pour une valeur particulière du vecteur paramètre  $\lambda$ . Ainsi  $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  est une solution statique d'un tel système si et seulement si :

$$f(x_0, \lambda_0) = 0. \quad (5.10)$$

### 5.3.2 Les branches de solutions statiques

Il existe en général plusieurs points d'équilibre pour le système (5.9), on parle alors de branche de solutions statiques. L'existence des branches de solutions statiques nous est fournie par une conséquence du théorème des fonctions implicites (voir Maddocks [33] pour plus de détails sur ce théorème) :

**Théorème (Unicité et existence d'une branche de solutions statiques)** Soit  $\dot{x} = f(x, \lambda)$ , un système dynamique et  $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  une solution stationnaire d'un tel système. Si  $f$  est continûment différentiable au voisinage de  $x_0$  et que sa matrice Jacobienne,  $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \end{bmatrix}$  en  $x_0$  est inversible : alors il existe une fonction unique  $x(\lambda)$  telle que  $x(\lambda_0) = x_0$  et  $f(x(\lambda), \lambda) = 0$  pour tout  $\lambda$  dans un voisinage de  $\lambda_0$ .

$(x(\lambda), \lambda)$  est alors appelée branche de solutions statiques du système. C'est la branche qui passe par  $(x_0, \lambda_0)$ . Cette branche existe tant que  $f$  est continûment dérivable et  $J$  inversible.

### 5.3.3 Étude de la stabilité

Une manière simple d'avoir des informations sur la stabilité d'un système dynamique est l'étude de la stabilité linéaire. Faire la théorie de la stabilité linéaire sur un système physique, c'est étudier la stabilité asymptotique de ce système sous de petites perturbations des variables principales (variable d'état  $x$ ), dont dépendent le système dynamique. La théorie de la stabilité linéaire stipule qu'un système est stable, si pour une perturbation suffisamment petite de sa position initiale, celui ci revient après un certain moment à sa place d'équilibre initiale (voir figure 5.1). Considérons notre système dynamique avec une solution stationnaire  $x_0$ . Cette solution est stable si, partant d'un point initial  $x(t)$  suffisamment proche de la position d'équilibre, le

système dynamique retrouve sa position d'équilibre lorsque  $t$  tend vers l'infini :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \longrightarrow x_0 \quad (5.11)$$

Inversement, la solution stationnaire est instable si toute perturbation, même petite, l'éloigne définitivement de sa position d'équilibre.

Considérons une solution  $x(t)$  dans un voisinage de la solution stationnaire  $x_0$  :  $x(t) = x_0 + \delta x_0(t)$  où  $(|\delta x_0(0)| = |\delta x_0^0| \ll |x_0|)$ . On suppose par simplification d'écriture que  $\lambda$  est une constante ( $\lambda = \lambda_0$ ). Effectuons alors un développement en série de Taylor de  $f$  (d'après l'équation 5.9) au voisinage du point stationnaire  $x_0$ , à l'ordre 1 :

$$\dot{x}(t) = f(x_0) + J(x_0, \lambda_0) \delta x_0(t) + O(|\delta x_0(t)|^2), \quad (5.12)$$

où

$$J(x_0, \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \lambda_0)$$

est la matrice jacobienne de  $f$  au point  $(x_0, \lambda_0)$  qui est une matrice constante, et  $|\cdot|$ , une norme sur  $\mathbb{R}^n$ . En supposant la perturbation  $\delta x_0(t)$  suffisamment petite au voisinage de  $x_0$  (à  $t = 0$ ) pour négliger les termes d'ordre supérieur ou égal à 2, et en utilisant le fait que  $f(x_0) = 0$ , on obtient le système linéarisé :

$$\delta \dot{x}_0 = J(x_0, \lambda_0) \delta x_0. \quad (5.13)$$

Un tel système linéaire est intégrable et admet pour unique solution :

$$\delta x_0(t) = x_0 e^{J(x_0, \lambda_0)t}. \quad (5.14)$$

On déduit alors que l'évolution de  $\delta x_0$  en fonction de  $t$  ne dépend que des valeurs propres de la matrice Jacobienne  $J(x_0, \lambda_0)$  :

- soit toutes les valeurs propres de  $J(x_0, \lambda_0)$  ont leurs parties réelles strictement négatives, et alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta x_0(t) = 0$ . Dans ce cas la perturbation  $\delta x_0$  tend à s'annuler et le point stationnaire  $x_0$  est stable ;
- soit au moins une des valeurs propres de  $J(x_0, \lambda_0)$  a une partie réelle strictement positive. Dans ce cas la perturbation  $\delta x_0$  sera amplifiée au cours du temps et le point fixe  $x_0$  est instable.

Ainsi, toutes les informations sur la stabilité asymptotique du point fixe sont contenues dans le spectre de la matrice Jacobienne de  $f$  calculée en ce point.

Un système physique classique pour comprendre la théorie de la stabilité linéaire est celui d'une bille sur un substrat solide de forme convexe ou concave (figure 5.1). Dans sa position initiale, le poids de la bille est compensé par la réaction du substrat

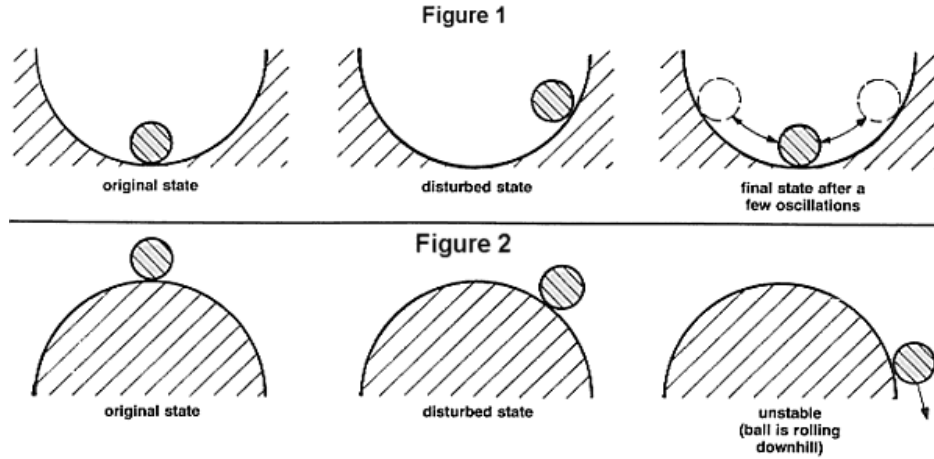


FIGURE 5.1 – Stabilité linéaire, exemple classique d'étude de la stabilité du système dynamique de bille sur une boule. Toute perturbation de la bille dans sa première position la ramène à sa position de départ : cette position est donc stable (schéma 1, "original state"). Inversement, toute perturbation de la bille dans sa deuxième position conduit irrémédiablement à sa chute : la position est donc instable (schéma 2, "original state").

solide : c'est un état stationnaire. Dans le premier cas (Figure 5.1,(a)) où la surface du substrat solide est concave, toute perturbation initiale, aussi grande qu'elle soit, conduit la bille, après quelques oscillations à sa position stationnaire : elle est donc stable. Inversement, dans le deuxième cas où la surface du solide est convexe, toute perturbation, aussi minime qu'elle soit, conduit à la chute de la bille, impossible donc de retrouver sa position stationnaire : cette solution stationnaire de la bille est donc instable.

D'une manière générale l'étude d'un système dynamique passe par les étapes suivantes :

- tout d'abord, identifier les différents paramètres et les conditions limites dont dépendent le système physique étudié,
- trouver les solutions stationnaires du problème,
- ensuite, étudier la stabilité linéaire de ces solutions stationnaires en les soumettant à de faibles perturbations d'ordre  $\delta$ ,
- linéariser les équations du système autour des solutions stationnaires, par développement de Taylor, en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2,
- finalement, trouver la stabilité des solutions stationnaires en étudiant les valeurs

- et enfin dresser le diagramme de bifurcation du système.

### 5.3.4 Étude de la bifurcation des solutions statiques

La théorie de la bifurcation dans le domaine de la mécanique est, d'une manière vague, l'étude du comportement d'un système dynamique. On parle de bifurcation lorsqu'un petit changement d'un paramètre physique du système engendre un changement majeur dans l'organisation du système. Considérons le système dynamique  $\dot{x} = f(x, \lambda)$ , dépendant du paramètre d'état  $x$ . En particulier des points d'équilibre peuvent être créés et détruits, ainsi que leurs stabilités changées. Ces changements qualitatifs dans le système dynamique sont appelés *bifurcation*.  $\lambda$  est alors le paramètre de bifurcation et les points fixes où apparaissent ces changements sont appelés des points de bifurcation. La variation du paramètre de bifurcation en ces points fixes provoque alors leur changement de stabilité.

Le long d'une branche de solutions stationnaires, la matrice Jacobienne  $J(x(\lambda), \lambda) = J(\lambda)$  varie continûment, ainsi que ces valeurs propres. Considérons  $(x_0, \lambda_0)$  un point de bifurcation du système dynamique (5.9).

Si une seule valeur propre de  $J(\lambda)$  a sa partie réelle nulle en  $\lambda_0$ , alors il s'agit nécessairement d'une valeur propre réelle nulle. Dans ce cas plusieurs scénarios sont possibles. En fonction du nombre de solutions statiques avant et après la bifurcation :

- on passe de deux solutions statiques à zéro solution statique : cela signifie que la branche de solutions statiques effectue un virage avec changement de stabilité pour revenir en arrière, il s'agit d'une bifurcation *nœud-col* et correspond à une valeur extrémal de  $\lambda$  ;
- si le nombre de solutions avant et après le point de bifurcation reste inchangé, alors deux branches de solutions statiques (une stable et l'autre instable) se croisent au point de bifurcation  $(x_0, \lambda_0)$  et échangent leurs stabilités : il s'agit d'une bifurcation *transcritique* ;
- si l'on passe d'une solution statique à 3 solutions statiques alors une branche de solutions stables se déstabilise en deux branches de solutions statiques stables et une branche de solutions stables. Ou inversement une branche de solution instables se déstabilise en deux branches de solutions instables et une branche de solutions stables : il s'agit d'une bifurcation de type *fourche*.

Si lors du passage au niveau du point de bifurcation,  $J(\lambda)$  admet un (et un seul) couple de valeurs propres complexes conjuguées avec sa partie réelle nulle en  $\lambda_0$  : dans ce cas il s'agit d'une bifurcation de *Hopf*, en honneur à celui qui l'a décrite pour la



première fois, Poincaré-Andronov Hopf. Il en existe de deux types :

- Les solutions (périodiques) au voisinage immédiat du point de bifurcation sont asymptotiquement stables : il s'agit alors d'une bifurcation de Hopf *directe* (ou surcritique) ;
- les solutions (périodiques) au voisinage immédiat du point de bifurcation sont asymptotiquement instables : il s'agit alors d'une bifurcation de Hopf *indirecte* (ou souscritique).

## 5.4 La linéarisation des équations de Eggers & Dupont

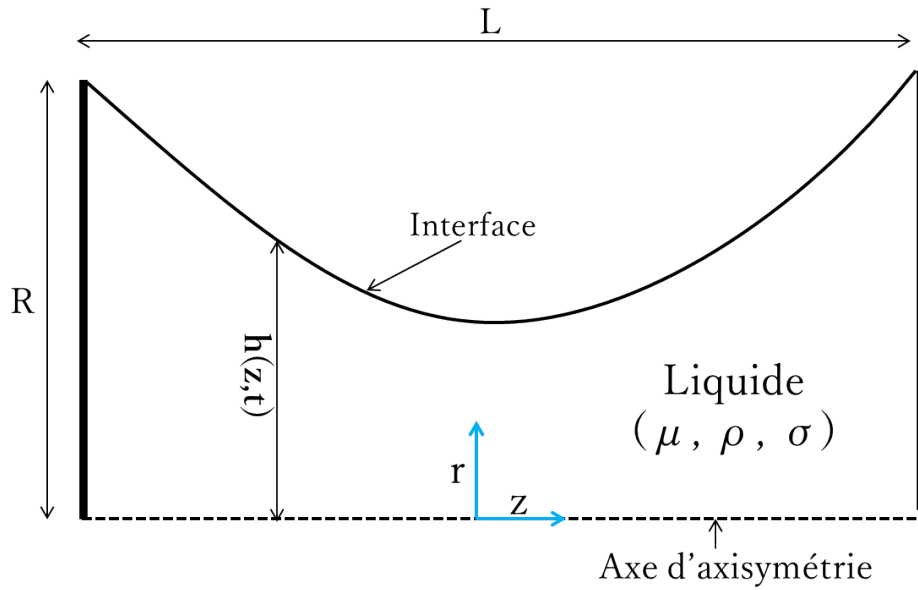


FIGURE 5.2 – Description schématique du pont capillaire.

Maintenant que nous avons décrit l'étude générale d'un système dynamique, revenons au système du pont capillaire dynamique décrit par les équations de Eggers & Dupont (figure 5.4). Dans ce système les paramètres principaux (paramètres d'état) sont : la vitesse  $u$ , la pression  $p$  et la position de l'interface du pont  $h$ . Considérons donc  $x = (u, h, p)$  notre vecteur des paramètres et  $x_0 = (U, H, P)$  une solution stationnaire de notre système. Pour linéariser nos équations, soumettons  $x_0$  à une petite

perturbation  $\delta x$ , c'est à dire :

$$u \mapsto U + \delta u, \quad (5.15a)$$

$$h \mapsto H + \delta h, \quad (5.15b)$$

$$p \mapsto P + \delta p. \quad (5.15c)$$

Par suite les équations (5.6) deviennent :

$$\partial_t(U + \delta u) = -(U + \delta u)(U_z + \delta u_z) - (P + \delta p_z) + \frac{3\nu[(H + \delta h)^2(U + \delta u)_z]}{(H + \delta h)^2}, \quad (5.16a)$$

$$(P + \delta p) = \sigma \left\{ \frac{1}{(H + \delta h)[1 + (H + \delta h)_z^2]} - \frac{(H + \delta h)_{zz}}{[1 + (H + \delta + h)_z^2]^{3/2}} \right\}, \quad (5.16b)$$

$$\partial_t(H + \delta h) = -(U + \delta u)(H + \delta h)_z - \frac{1}{2}(U + \delta u)_z(H + \delta h). \quad (5.16c)$$

En utilisant le développement limité de premier ordre de Taylor :

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x,$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on peut réécrire les différents termes des équations (5.16) sous les formes suivantes :

$$\frac{1}{(H + \delta h)^2} = \frac{1}{H^2 \left(1 + \frac{\delta h}{H}\right)^2} = \frac{1}{H^2} \left(1 - 2\frac{\delta h}{H}\right) \quad (5.17)$$

$$\frac{1}{[1 + (H + \delta + h)_z^2]^{1/2}} = \frac{1}{(1 + H_z^2 + 2H_z\delta h_z)}, \quad (5.18)$$

$$= \frac{1}{(1 + H_z^2)^{1/2} \left(1 + \frac{2H_z\delta h_z}{1 + H_z^2}\right)^{1/2}}, \quad (5.19)$$

$$= \frac{1}{(1 + H_z^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{H_z\delta h_z}{1 + H_z^2}\right). \quad (5.20)$$

De la même manière on réécrit les termes suivants :

$$\frac{1}{(H + \delta h)} = \frac{1}{H} \left(1 - \frac{\delta h}{H}\right), \quad (5.21)$$

$$\frac{1}{[1 + (H + \delta + h)_z^2]^{3/2}} = \frac{1}{(1 + H_z^2)^{3/2}} \left(1 - 3\frac{H_z\delta h_z}{1 + H_z^2}\right). \quad (5.22)$$

En remplaçant ces différents termes dans les équations (5.16), et en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2, nous arrivons finalement aux équations linéarisées sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} = -U \delta u_z - U_z \delta u - \frac{\delta p_z}{\rho} - \frac{6\nu H_z U_z}{H^2} \delta h + \frac{6\nu U_z}{H} \delta h_z - \frac{6\nu H_z}{H} \delta u_z + 3\nu \delta u_{zz}, \quad (5.23a)$$

$$\frac{\partial \delta h}{\partial t} = -U \delta h_z - U_z \delta h - \frac{1}{2} H \delta u_z h - \frac{1}{2} U_z \delta h, \quad (5.23b)$$

$$\delta p = \sigma \left[ -\frac{1}{H^2 a^1/2} - \left( \frac{H_z}{H a^3/2} - \frac{3H_z H_{zz}}{a^5/2} \right) \delta h_z - \frac{1}{a^3/2} \delta h_{zz} \right], \quad (5.23c)$$

avec  $a = 1 + H_z^2$ .

## 5.5 Analyse de la stabilité

Une fois les équations linéarisées, nous pouvons étudier la stabilité du système en étudiant les valeurs propres de la matrice Jacobienne du système. Étant linéaire, nous pouvons récrire les équations du système sous la forme :

$$\dot{x} = Ax, \quad (5.24)$$

où  $A$  est un opérateur linéaire :

$$A = \begin{bmatrix} -U_z + \left( \frac{6\nu H_z}{H} - U \right) \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{6\nu H_z U_z}{H} + \left( \frac{6\nu U_z}{h} \right) \frac{\partial}{\partial z} \\ -H_z - \frac{1}{2} H \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{1}{2} U_z - U \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

avec  $L$  l'opérateur différentiel pour l'équation de la pression :

$$L = \sigma \left[ -\frac{1}{H^2 a^1/2} - \left( \frac{H_z}{H a^3/2} - \frac{3H_z H_{zz}}{a^5/2} \right) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{a^3/2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]. \quad (5.26)$$

## Conclusion

Voici en résumé le travail théorique nécessaire à l'étude de la stabilité du pont capillaire par les équations de Eggers & Dupont [16]. Un code *Matlab* est développé sur la base de ces théories pour dresser numériquement les branches de solutions stationnaires ainsi que leur stabilité.

## 5.6 La procédure numérique

Le code *Matlab* a été développé par Jérôme Hoepffner et Andréa Tripodi (pendant son stage de Master 2 dans le labo). Cette section sera consacrée à présenter les grandes lignes des méthodes numériques développées dans ce code. Particulièrement les différentes techniques utilisées pour dresser le diagramme de bifurcation.

### 5.6.1 La méthode de Continuation

Comme décrit précédemment, la première chose importante dans l'analyse d'un système dynamique est de trouver les branches de solutions stationnaires. La méthode de continuation, d'une manière générale, permet d'approximer de manière efficace ces branches de solutions statiques, à partir d'une solution stationnaire connue. Considérons notre système dynamique (5.9), l'ensemble des solutions stationnaires est solution de l'équation :

$$f(x, \lambda) = 0, \quad (5.27)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  le vecteur paramètre d'état,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Partant d'une solution stationnaire  $(x_0, \lambda_0)$ . On s'intéresse à l'évolution de ce point stationnaire  $x_0$  lorsque  $\lambda_0$  varie. Comme présenté précédemment, il existe en général une branche de solutions statiques et unique, sous conditions de régularité et de continuité suffisantes sur  $f$ . La méthode de continuation consiste à calculer les branches de solutions stationnaires à partir de la seule donnée d'un point de solution stationnaire de départ  $(x_0, \lambda_0)$ .

#### Méthode de Newton

La méthode classique de Newton [13] est assez efficace pour trouver numériquement une approximation précise des zéros (ou racines) successifs d'une fonction réelle. Considérons l'équation stationnaire  $F(x) = 0$  avec  $F$  une fonction dérivable. Dans notre système la fonction  $F(x) \equiv f(x, \lambda)$  avec  $\lambda$  une constante (dans ce cas). On peut écrire en utilisant le développement de Taylor :

$$0 = F(x_0) \approx F(x_0) + F'(x_0) \cdot (x_0 - x_0), \quad (5.28)$$

où  $x_0$  est notre première approximation de la solution stationnaire  $x_0$  et  $F'(x_0)$  est la dérivée (la matrice Jacobienne calculée) en  $x_0$ . Partant de là, on évalue la seconde approximation  $x_1$ , solution de l'équation :

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \quad (5.29)$$

Cette deuxième approximation est en générale plus proche de notre solution stationnaire  $x_0$ . De cette manière on approxime de manière successive  $(x_k)$  cette solution stationnaire :

$$x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})}{F'(x_{k-1})}, \quad (5.30)$$

avec  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x_0$ . Si  $x_0$  est isolé, alors il existe un voisinage de  $x_0$  tel que pour toutes les valeurs de départ  $x_0$  dans ce voisinage, la suite  $(x_k)$  converge vers  $x_0$ . La méthode garantit une convergence quadratique si toutes les solutions  $x_k$  existent et que la première approximation satisfait la condition  $|x_0 - x_0| < \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  une quantité petite et fixée. La méthode de Newton requiert que la fonction  $F$  soit dérivable. Elle échoue donc lorsque  $F$  n'est pas dérivable ou lorsque  $F'(x_k) = 0$ . En pratique, bien que ces solutions existent, la convergence quadratique vers la solution stationnaire n'est pas souvent satisfaite, notamment à cause de la condition  $|x_0 - x_0| < \varepsilon$ . Si la valeur de départ est trop éloignée du vrai zéro (la solution stationnaire), la méthode de Newton peut rentrer en boucle infinie sans produire une approximation améliorée. À cause de cela, toute mise en œuvre de la méthode de Newton doit inclure un code de contrôle du nombre d'itérations.

Il y a plusieurs manières de s'assurer de la convergence de la méthode de Newton, nous optons pour la méthode de continuation par pseudo-longueur d'arc pour mieux prédire ces solutions stationnaires.

### Méthode de continuation par pseudo-longueur d'arc

La méthode par pseudo-longueur d'arc a été proposée pour la première fois par Keller [23]. Elle est basée sur le fait qu'une courbe est idéalement paramétrée par des longueurs d'arc. L'idée de base de la méthode est de générer une suite de points  $(U_i^{(k)}, \lambda_i^{(k)})$ , convergente vers la prochaine solution statique  $(U_{i+1}, \lambda_{i+1})$  partant de la solution initiale  $(U_i, \lambda_i)$ . On ne cherche donc pas une solution exacte qui vérifie rigoureusement l'équation mais une solution avec une précision voulue  $\|f(U_{i+1}, \lambda_{i+1})\| < \varepsilon$ . La résolution s'effectue par itération en respectant les 3 phases suivantes.

**La prédiction** : elle consiste à calculer une première approximation  $(U_i^{(0)}, \lambda_i^{(0)})$  de la solution, en partant de  $(U_i, \lambda_i)$ . Cette première prédiction n'est pas nécessairement solution stationnaire mais on s'arrange généralement pour qu'elle ne soit pas trop loin de celle-ci. La prédiction tangente est définie par :

$$U_i^{(0)} = U_i + \Delta U, \quad (5.31)$$

$$\lambda_i^{(0)} = \lambda_i + \Delta \lambda, \quad (5.32)$$

et cette première prédiction doit vérifier l'équation stationnaire :

$$f(U_i + \Delta U, \lambda_i + \Delta \lambda) = 0. \quad (5.33)$$

Le développement limité de cette équation au point  $(U_i, \lambda_i)$  donne :

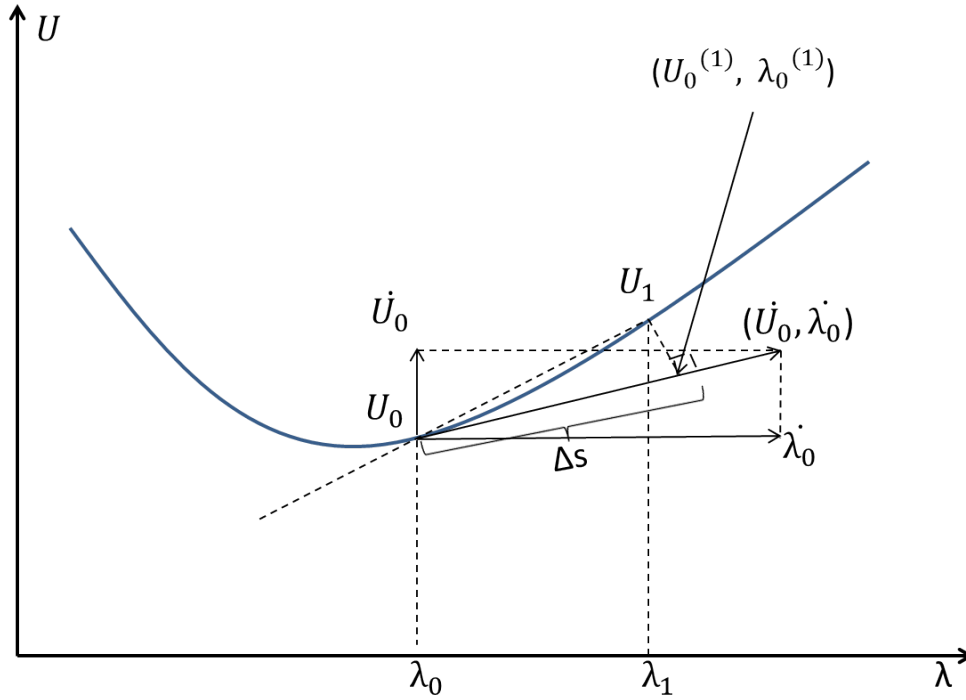


FIGURE 5.3 – Méthode de continuation numérique "pseudo arc-length"

$$f(U_i + \Delta U, \lambda_i + \Delta \lambda) = f(U_i, \lambda_i) + \frac{\partial f}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \Delta \lambda + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial U^2} \Delta U \Delta U + \dots, \quad (5.34)$$

où  $\frac{\partial f}{\partial U}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial U^2}$  sont les dérivées partielles de  $f$  par rapports à  $U$ ,  $\lambda$ ,  $U^2$ , et  $\frac{\partial f}{\partial U}$  étant la matrice Jacobienne prise en  $U$ . En négligeant les termes d'ordre 2 et en supposant  $f(U_i, \lambda_i) = 0$  l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial f}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \Delta \lambda = 0, \quad (5.35)$$

$$U_i^{(0)} = U_i + \Delta U, \quad (5.36)$$

$$\lambda_i^{(0)} = \lambda_i + \Delta \lambda. \quad (5.37)$$

**Correction** : si la prédiction précédente satisfait la condition  $\|f(U_i^{(0)}, \lambda_i^{(0)})\| < \varepsilon$ , dans ce cas on pose  $(U_i^{(0)}, \lambda_i^{(0)}) = (U_{i+1}, \lambda_{i+1})$ . Dans le cas contraire il faut donc procéder à plusieurs corrections pour pouvoir satisfaire cette condition. La correction se fait alors par la méthode de Newton sur la fonction  $f(U_i^{(k)}, \lambda_i^{(k)} + \Delta \lambda) = 0$  partant de

$$f(U_i^{(0)}, \lambda_i^{(0)} + \Delta \lambda) = 0.$$

En supposant qu'on a déjà effectué  $k$  itérations, cette phase consiste donc à chercher la correction  $(\Delta U_i^{(k)}, \Delta \lambda_i^{(k)})$  à apporter à la prédiction  $(U_i^{(k)}, \lambda_i^{(k)})$  pour vérifier la condition d'arrêt  $\|f(U_i^{(0)}, \lambda_i^{(0)})\| < \varepsilon$ .

**Continuation :** en itérant sur  $k$  on trouve alors un  $k^*$  pour laquelle  $\|f(U_i^{(k^*)}, \lambda_i^{(k^*)})\| < \varepsilon$ , et dans ce cas on a  $(U_{i+1}, \lambda_{i+1}) = (U_i^{(k^*)}, \lambda_i^{(k^*)})$ . Et on poursuit l'itération sur  $i$  pour trouver les autres solutions statiques de la branche.

## 5.7 Résultats

### 5.7.1 Validation du code

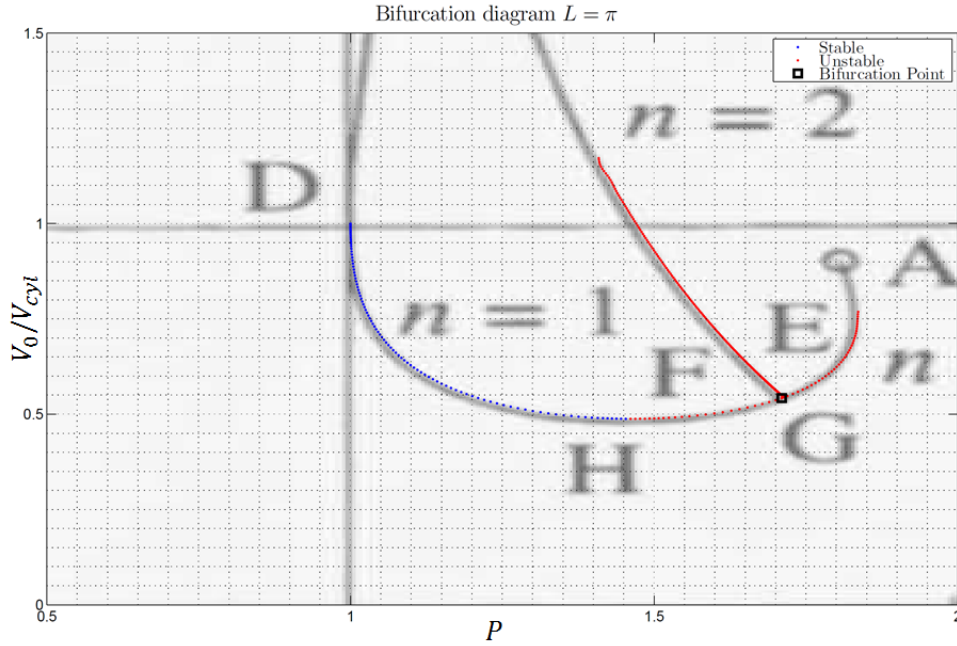


FIGURE 5.4 – Diagramme de bifurcation,  $V/V_0$  en fonction de la pression  $P$ . Comparaison avec les résultats de [32] : la figure vient de l'article de [32], sur laquelle sont tracés les résultats du code 1D basé sur les équations de Eggers & Dupont.

Quelques cas tests ont été effectués avec ce code 1D. Je présente brièvement celui qui nous intéresse le plus : stabilité du pont capillaire. Le diagramme de bifurcation pour le cas  $(L/R = \pi, Bo = 0)$ , dans l'espace  $(V_0/V_{cyl}, p)$ , dans le cas statique, est dressé ici sur

la figure 5.4. Il s'agit ici d'utiliser simplement la méthode de continuation par pseudo-longueur d'arc (le code *Matlab*) pour dresser la branche des solutions stationnaires du système :  $f(x, \lambda)$  avec  $x = V_0/V_{cyl}$  et  $\lambda = p$ . Le diagramme de bifurcation obtenu est comparé aux résultats de Lowry [32] (sur la figure 5.4), en noir et blanc. On voit sur ce graphique que les résultats du code 1D (basé sur les équations de Eggers & Dupont) sont en accord avec ceux de [32]. Les points de bifurcation ainsi que tous les régimes de stabilité de la branche des solutions stationnaires sont vérifiés.

### 5.7.2 Comparaisons avec nos simulations

Retrouvons maintenant le cas dynamique :  $f(x, \lambda)$  avec  $x = (h, p)$  et

$$\lambda = W_e = \frac{\rho R u^2}{\sigma}.$$

Nous dressons les diagrammes de bifurcation, pour différents rapports d'aspects  $L/R$  et différents rapports de volumes  $V_0/V_{cyl}$  dans l'espace  $(V_0/V_{cyl}, W_e)$ . Nous représentons sur la figure 5.5, le cas du rapport d'aspect  $L/R = 4$ , pour deux volumes différents. Nous ajoutons également les résultats de nos simulations. D'une manière générale, les diagrammes de bifurcation montrent deux types de comportements :

- pour des volumes faibles, le diagramme contient une seule branche de solutions stationnaires avec deux types de régime. Le régime stable (en bleu) où le cou du pont décroît progressivement en fonction de l'augmentation du Weber (figure 5.5, "first branch"). Rappelons que nous commençons par un Weber nul, que l'on augmente progressive. Le pont, initialement stable va voir son cou décroître avec l'augmentation du Weber. Pendant cette phase, les solutions stationnaires de la branche restent stables. Si on continue d'augmenter le Weber, la branche des solutions jusque là stable, rencontre un point de bifurcation de type *nœud-col* (demi-stable demi-instable) : c'est le début du régime instable (en rouge sur la figure 5.5).
- Pour des volumes élevés ( $V_0/V_{cyl} > 0.8$ ), le diagramme de bifurcation admet deux branches de solutions stationnaires. En plus de la première branche pour de faibles nombres de Weber, le diagramme admet une seconde branche lorsque le débit dans le pont est assez grand. Cette seconde branche contient un nouveau régime d'instabilité, qui est la bifurcation de type *Hopf* (en vert) et qui relie le régime stable au régime instable de la seconde branche (figure 5.5, "second branch").

Ce régime (bifurcation de type *Hopf*) va correspondre en effet au régime d'oscillation du pont capillaire observé dans nos simulations.



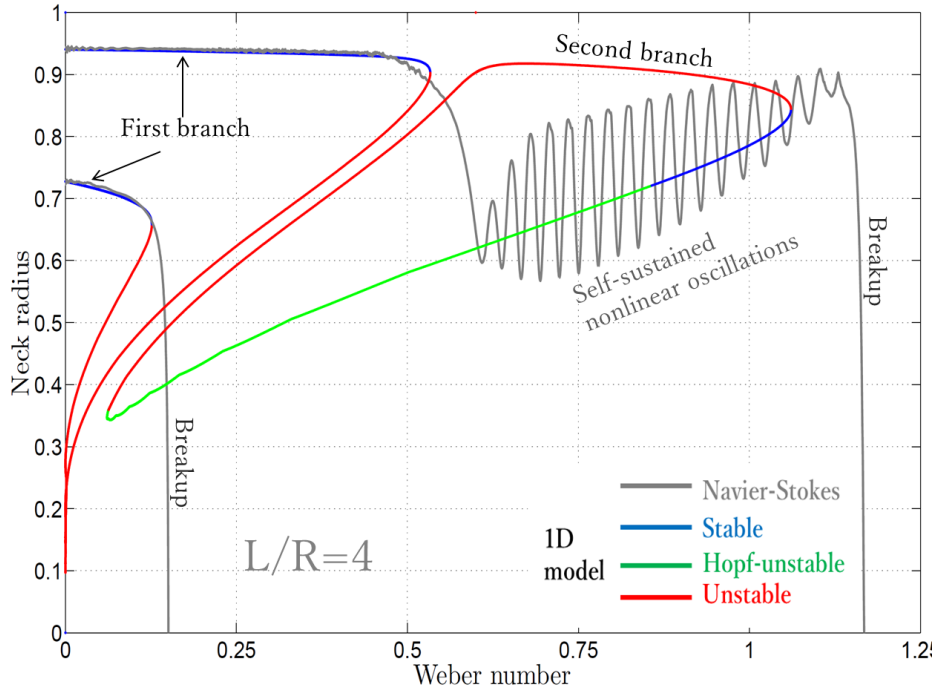


FIGURE 5.5 – Comparaison du diagramme de bifurcation (DNS, 1D) pour le cas  $L/R = 4$  et pour deux valeurs de volumes  $V_0/V_{cyl} = 0.67, 0.93$ .

### Comparaisons pour tous les rapports d'aspects

Les comparaisons sont présentées sur les figures (5.6 à 5.9) pour des rapports d'aspect différents et pour différents volumes. Les deux comportements décrits plus hauts (figure 5.5) se retrouvent dans les calculs de chaque rapport d'aspect, mais pour des Weber critiques différents.

Le tableau suivant présente les paramètres de nos campagnes de simulations. Les courbes de comparaison pour les 4 rapports d'aspect pour lesquels nous avons effectué nos calculs sont présentées sur les figures 5.6 à 5.9.

### Cas des volumes faibles ( $V_0/V_{cyl} < 0.8$ ).

Rappelons que dans nos simulations (DNS), ce régime est celui où on observe un claquage immédiat du pont capillaire lorsqu'on augmente le Weber (figure 5.5, pour le cas  $L/R = 4$ ,  $V_0/V_{cyl} = 0.67$  : courbe en couleur grise). Ce régime, sur le diagramme de bifurcation, correspond au cas où on a une seule branche de bifurcation.

En fonction de l'augmentation du débit dans le pont, son rayon décroît progressivement mais le pont reste stable : c'est le régime stable de la branche des solutions stationnaires du diagramme de bifurcation. Lorsqu'on atteint le Weber critique dans

Rapports d'aspect	$L/R = 2$	$L/R = 3$	$L/R = 4$	$L/R = 5$
Volumes $V_0/V_{cyl}$	0.53417	0.6253	0.6720	0.7745
	0.62714	0.6876	0.7187	0.8495
	0.72014	0.7500	0.7655	0.8870
	0.76665	0.8124	0.8122	0.9434
	0.81318	0.8436	0.8590	0.9434
	0.85972	0.8748	0.9058	
	0.90628	0.9373	0.9292	
	0.95286	0.9686	0.9527	

TABLE 5.1 – Table des données : les paramètres de nos simulations sur la pont capillaire dynamique sont regroupés dans ce tableau. Les simulations ont été faites pour 4 différents rapports d'aspect  $L/R$ . Pour chaque rapport d'aspect, des calculs ont été effectués sur 5 à 8 volumes  $V_0/V_{cyl}$ .

nos simulations, les courbes issues du DNS rencontrent le régime instable de la branche des solutions stationnaires : le pont devient instable, et la décroissance du rayon de son cou chute brutalement vers zéro. Le Weber critique de claquage du pont correspond ainsi à celui du point de bifurcation sur le diagramme.

#### Cas des volumes élevés ( $V_0/V_{cyl} > 0.8$ ).

Ce régime correspond dans nos simulations (DNS) au cas où l'évolution du rayon du cou du pont, en fonction de l'augmentation du Weber, enregistre un minimum local et croît ensuite, avec ou sans oscillations jusqu'au Weber critique de claquage (figure 5.5, pour le cas  $L/R = 4$ ,  $V_0/V_{cyl} = 0.93$ ). Dans ce régime, le diagramme de bifurcation admet deux branches de solutions stationnaires. Dans le régime stable de la première branche du diagramme, les deux courbes (DNS et 1D) sont exactement les mêmes. À la rencontre du point de bifurcation, la courbe issue du DNS, quitte la première branche de bifurcation 1D, pour rejoindre la seconde branche où elle rencontre le régime instable par *Hopf* du 1D et commence à osciller. Les oscillations vont croître en amplitude en fonction du Weber (dans le régime instable par *Hopf*), puis s'atténuer, lorsqu'elle passe au régime stable de la branche. L'atténuation continue jusqu'à la nouvelle rencontre de la courbe DNS avec le régime instable de la seconde branche où elle entame sa décroissance brutale pour se fragmenter.

Ces descriptions sont plus pertinentes sur la figure explicative figure 5.5 pour  $L/R = 4$ . Mais c'est également ce qu'on observe pour les autres rapports d'aspect (figures 5.6 à 5.9), seuls les Webers critiques d'oscillations ou de claquage vont changer d'un rapport

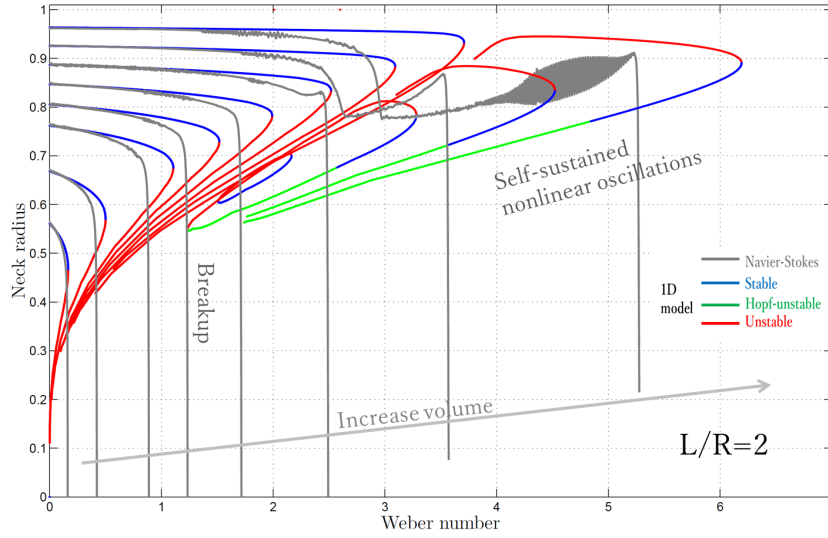


FIGURE 5.6 – Évolution du rayon du cou du pont capillaire en fonction du nombre de Weber. Données de la Table 5.1,  $L/R = 2$

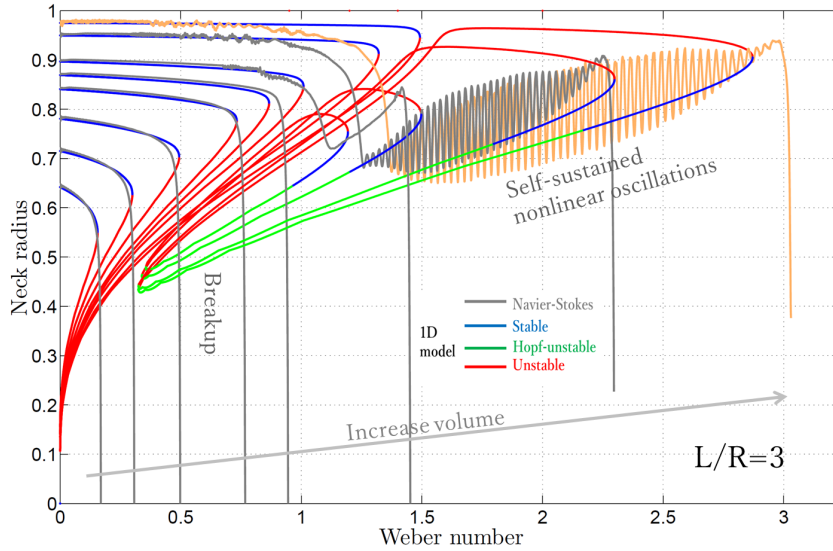


FIGURE 5.7 – Évolution du rayon du cou du pont capillaire en fonction du nombre de Weber. Données de la Table 5.1,  $L/R = 3$

d'aspect à un autre. D'une manière générale les ponts plus petits en rapport d'aspect requièrent de grands Webers pour se fragmenter. Les fragmentations sont plus violentes, les amplitudes d'oscillations plus petites mais avec des fréquences plus importantes (le cas  $L/R = 2$ ). En effet, pour les comparaisons avec les diagrammes de bifurcation, ce cas  $L/R = 2$  marche moins bien que les autres rapports d'aspects. L'écart s'explique par

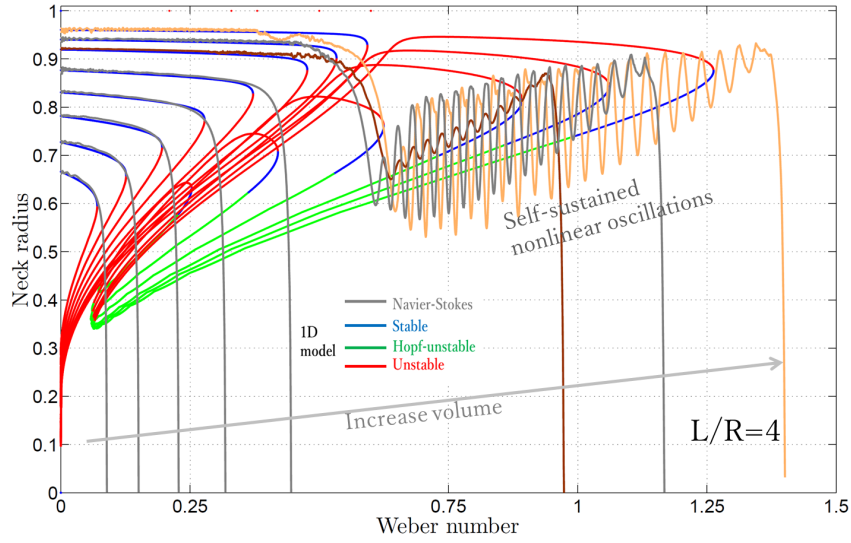


FIGURE 5.8 – Évolution du rayon du cou du pont capillaire en fonction du nombre de Weber. Données de la Table 5.1,  $L/R = 4$

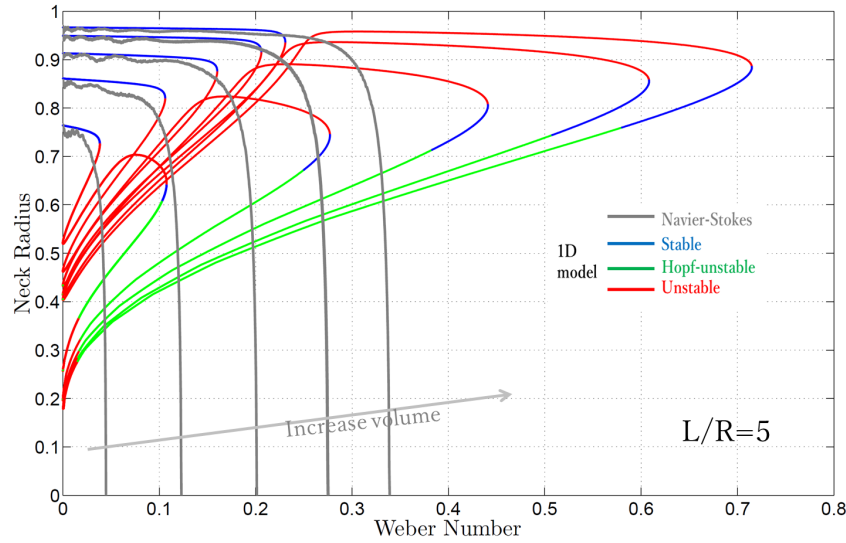


FIGURE 5.9 – Évolution du rayon du cou du pont capillaire en fonction du nombre de Weber. Données de la Table 5.1,  $L/R = 5$

le fait que l'approximation de Eggers & Dupont [16] est basée sur le fait que le ligament est suffisamment allongé (c'est à dire  $L \gg R$ ) pour assurer les développements en série de Taylor en  $r$  des champs de vitesse et de pression dans le système, ce qui n'est pas le cas pour  $L/R = 2$ . Par ailleurs, plus on va augmenter le rapport d'aspect plus on va se rapprocher de la limite de Rayleigh-Plateau ( $L/R = 2\pi$ ). Pour  $L/R = 5$  nous n'avons

presque pas observé d'oscillations. Seul le cas  $V_0/V_{cyl} = 1$  présente quelques unes. Les fragmentations se produisent pour des valeurs de Weber beaucoup plus faibles, étant donné qu'il est plus susceptible à l'instabilité de Rayleigh-Plateau.

Tous les résultats présentés jusque là on été produits avec une viscosité dynamique fixé  $\mu = 0.01$ . Dans la section suivante nous présentons l'influence de la viscosité sur les diagrammes de bifurcation.

### 5.7.3 Influence du nombre d'Ohnesorge

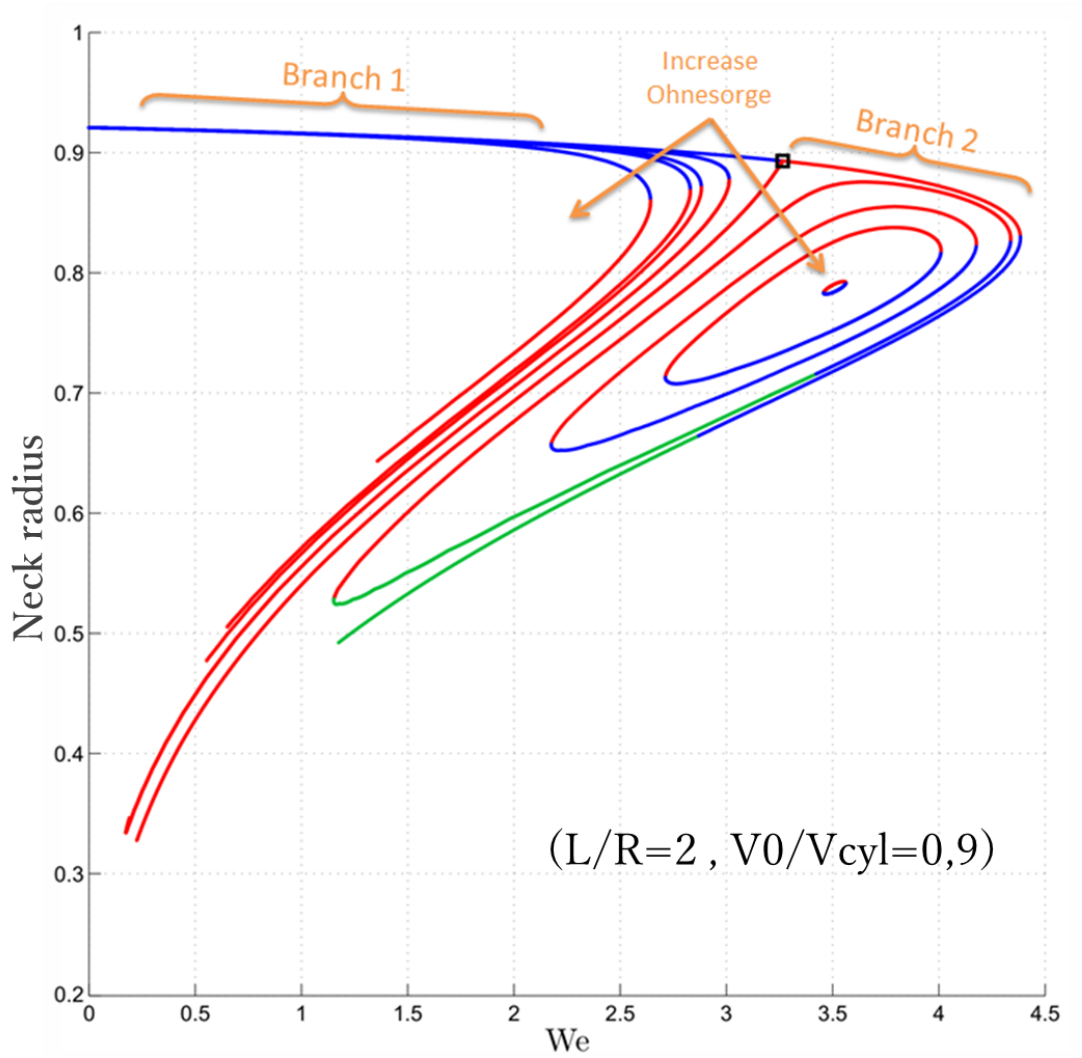


FIGURE 5.10 – Influence de la viscosité sur le diagramme de bifurcation. Cas de  $L/R = 2$  et  $V_0/V_{cyl} = 0.9$ , pour les différentes viscosités  $\nu = 0, 1e-2, 2e-2, 2.5e-2, 2.95e-2$ .

La viscosité, ou encore le nombre d'Ohnesorge

$$O_h = \frac{\mu}{\sqrt{\rho R \sigma}},$$

joue un rôle central dans la forme du diagramme de bifurcation. Cette influence sur le diagramme de bifurcation est représentée sur la figure 5.10 pour ( $L/R = 2, V/V_0 = 9$ ). Dans le cas sans viscosité ( $O_h = 0$ ) par exemple, les deux branches de solutions stationnaires du diagramme de bifurcation coalescent ensemble à travers le point de bifurcation de type fourche. Il n'y a de séparation nette entre les deux branches de solutions du diagramme que lorsque la viscosité du système est non nulle. Dans ce cas une distance se crée entre les deux branches qui est d'autant plus grande que la valeur de la viscosité est importante. Ainsi l'augmentation de la viscosité réduit le Weber critique de fragmentation du pont : le régime stable de la première branche de solutions est plus courte.

Par ailleurs l'existence d'une seconde branche de bifurcation dans le diagramme est intimement liée à la valeur de la viscosité du système. Ainsi, comme le montre la figure 5.10, cette branche disparaît dès que  $O_h > 0.0295$ . De la même manière le régime d'instabilité de type *Hopf* disparaît lorsque  $O_h > 0.015$ .

Du fait que toutes nos simulations (DNS) ont été faites jusque là pour  $O_h = 0.01$ , ce graphe est particulièrement important pour nous, pour avoir une idée sur l'influence de la viscosité sur le comportement du pont capillaire. Et cette valeur du  $O_h$  est bien choisie du fait que le diagramme de bifurcation rassemble les trois régimes et la séparation des deux branches.

## 5.8 Conclusion

Le but de ce chapitre était d'établir des diagrammes de bifurcation pour le système dynamique du pont capillaire et de les comparer à nos simulations numériques. Après une description de la théorie de bifurcation, le code *Matlab* basé sur les équations de Eggers & Dupont [16] (développé par J. Hoepffner et A. Tripodi) a été présenté brièvement. Nous avons dressé avec ce code le diagramme de bifurcation du pont capillaire pour différents rapports d'aspect et différents volumes. Par suite nous avons comparé les résultats avec ceux de nos simulations (basées sur les équations complètes de Navier-Stokes) du chapitre précédent. Ces comparaisons montrent un bon accord, dans la limite de validité des approximations 1D ( $L \gg R$ ).



- [1] ANTKOWIAK, A., BREMOND, N., LE DIZES, S., AND VILLERMAUX, E. Short-term dynamics of a density interface following an impact. *Journal of Fluid Mechanics* 577 (2007), 241–250.
- [2] AULISA, E., MANSERVISI, S., SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Interface reconstruction with least-squares fit and split advection in three-dimensional cartesian geometry. *Journal of Computational Physics* 225, 2 (2007), 2301–2319.
- [3] BAYVEL, L., AND ORZECOWSKI, Z. Liquid atomization, combustion : An international series, 1993.
- [4] BELL, J. B., AND MARCUS, D. L. A second-order projection method for variable-density flows. *Journal of Computational Physics* 101, 2 (1992), 334–348.
- [5] BLANCHARD, D. C., AND HEINRICH, B. C. *From raindrops to volcanoes*. Doubleday Garden City, NY, 1967.
- [6] BRACKBILL, J., KOTHE, D. B., AND ZEMACH, C. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of computational physics* 100, 2 (1992), 335–354.
- [7] BREMOND, N. *Stabilité et atomisation des nappes liquides*. PhD thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I, 2003.
- [8] BRENNER, M. P., AND GUEYFFIER, D. On the bursting of viscous films. *Physics of Fluids* 11 (1999), 737–739.
- [9] CASTREJÓN-PITA, A. A., CASTREJON-PITA, J., AND HUTCHINGS, I. Breakup of liquid filaments. *Physical review letters* 108, 7 (2012), 074506.
- [10] CHORIN, A. J. On the convergence of discrete approximations to the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation* 23, 106 (1969), 341–353.



- [11] CONRATH, M., CANFIELD, P., BRONOWICKI, P., DREYER, M. E., WEISLOGEL, M. M., AND GRAH, A. Capillary channel flow experiments aboard the international space station. *Physical Review E* 88, 6 (2013), 063009.
- [12] CULICK, F. Comments on a ruptured soap film. *Journal of applied physics* 31, 6 (1960), 1128–1129.
- [13] DE LA GRANGE, J. L. *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés : avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques*. Bachelier, 1826.
- [14] DRIESSEN, T., JEURISSEN, R., WIJSHOFF, H., TOSCHI, F., AND LOHSE, D. Stability of viscous long liquid filaments. *Physics of Fluids (1994-present)* 25, 6 (2013), 062109.
- [15] EGGERS, J. Universal pinching of 3d axisymmetric free-surface flow. *Physical Review Letters* 71, 21 (1993), 3458.
- [16] EGGERS, J., AND DUPONT, T. F. Drop formation in a one-dimensional approximation of the navier–stokes equation. *Journal of fluid mechanics* 262 (1994), 205–221.
- [17] FRANCOIS, M. M., CUMMINS, S. J., DENDY, E. D., KOTHE, D. B., SICILIAN, J. M., AND WILLIAMS, M. W. A balanced-force algorithm for continuous and sharp interfacial surface tension models within a volume tracking framework. *Journal of Computational Physics* 213, 1 (2006), 141–173.
- [18] GHABACHE, E., ANTKOWIAK, A., JOSSEAND, C., AND SÉON, T. On the physics of fizziness : How bubble bursting controls droplets ejection. *Physics of Fluids (1994-present)* 26, 12 (2014), 121701.
- [19] GUEYFFIER, D., LI, J., NADIM, A., SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *Journal of Computational Physics* 152, 2 (1999), 423–456.
- [20] HARVIE, D. J., DAVIDSON, M., AND RUDMAN, M. An analysis of parasitic current generation in volume of fluid simulations. *Applied mathematical modelling* 30, 10 (2006), 1056–1066.
- [21] HOYT, J. W., AND TAYLOR, J. Waves on water jets. *Journal of Fluid Mechanics* 83, 01 (1977), 119–127.
- [22] JAMES, A., VUKASINOVIC, B., SMITH, M. K., AND GLEZER, A. Vibration-induced drop atomization and bursting. *Journal of Fluid Mechanics* 476 (2003), 1–28.

- [23] KELLER, H. Lectures on numerical methods in bifurcation problems. *Applied Mathematics* 217 (1987), 50.
- [24] KELLER, J. B. Breaking of liquid films and threads. *Physics of Fluids (1958-1988)* 26, 12 (1983), 3451–3453.
- [25] KELLER, J. B., AND MIKSI, M. J. Surface tension driven flows. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 43, 2 (1983), 268–277.
- [26] KUBITSCHKE, J., AND WEIDMAN, P. Helical instability of a rotating liquid jet. *Physics of Fluids* 20, 9 (2008), 91104.
- [27] LAFAURIE, B., NARDONE, C., SCARDOVELLI, R., ZALESKI, S., AND ZANETTI, G. Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with surfer. *Journal of Computational Physics* 113, 1 (1994), 134–147.
- [28] LAPLACE, P. S. *Traité de mécanique céleste/par PS Laplace...; tome premier [-quatrième]*, vol. 4. de l’Imprimerie de Crapelet, 1805.
- [29] LHUISSIER, H., AND VILLERMAUX, E. Soap films burst like flapping flags. *Physical review letters* 103, 5 (2009), 054501.
- [30] LI, J. Calcul d’interface affine par morceaux. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, astronomie* 320, 8 (1995), 391–396.
- [31] LI, J. *Résolution numérique de l’équation de Navier-Stokes avec reconnection d’interfaces. Méthode de suivi de volume et application à l’atomisation.* PhD thesis, 1996.
- [32] LOWRY, B. J., AND STEEN, P. H. Stability of slender liquid bridges subjected to axial flows. *Journal of Fluid Mechanics* 330 (1997), 189–213.
- [33] MADDOKS, J. H. Stability and folds. *Archive for Rational mechanics and Analysis* 99, 4 (1987), 301–328.
- [34] MARMOTTANT, P. *Atomisation d’un liquide par un courant gazeux.* PhD thesis, Grenoble, INPG, 2001.
- [35] MARTÍNEZ, I., AND PERALES, J. Liquid bridge stability data. *Journal of crystal growth* 78, 2 (1986), 369–378.
- [36] MESEGUER, J. The influence of axial microgravity on the breakage of axisymmetric slender liquid bridges. *Journal of crystal growth* 62, 3 (1983), 577–586.
- [37] M’KENDRICK, J. G. Helmholtz in berlin—physical researches continued [1].
- [38] MYSHKIS, A., BABSKII, V., KOPACHEVSKII, N., SLOBOZHANIN, L., TYUPTSOV, A., AND WADHWA, R. Low-gravity fluid mechanics. *Translated from the*

- Russian by Wadhwa, RS, XIX, 583 pp. 218 figs.. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1 (1987).*
- [39] NIKITOPOULOS, D. E., AND KELLY, A. J. Formation of a net-negative charged liquid spray. *Physics of Fluids (1994-present)* 12, 9 (2000), S7–S7.
  - [40] NOTZ, P. K., AND BASARAN, O. A. Dynamics and breakup of a contracting liquid filament. *Journal of Fluid Mechanics* 512 (2004), 223–256.
  - [41] PLATEAU, J. *Acad. Sci.*, vol. XVI. Bruxelles Mém., 1843.
  - [42] PLATEAU, J. *Acad. Sci.*, vol. XXIII. Bruxelles Mém., 1849.
  - [43] PLATEAU, J. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, vol. 2. Gauthier-Villars, 1873.
  - [44] POPINET, S. Gerris : a tree-based adaptive solver for the incompressible euler equations in complex geometries. *Journal of Computational Physics* 190, 2 (2003), 572–600.
  - [45] POPINET, S. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *Journal of Computational Physics* 228, 16 (2009), 5838–5866.
  - [46] POPINET, S., AND ZALESKI, S. A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 30, 6 (1999), 775–793.
  - [47] QUERE, D., DE GENNES, P., BROCHARD-WYART, F., AND REISINGER, A. Capillarity and wetting phenomena : Drops, bubbles, pearls, waves, 2004.
  - [48] RAYLEIGH, L. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proceedings of the London Mathematical Society* 1, 1 (1879), 57–72.
  - [49] RAYLEIGH, L. Some applications of photography. *Nature* 44, 1133 (1891), 249–254.
  - [50] RAYLEIGH, L. *Sci. Papers*, vol. I. 1899.
  - [51] RAYLEIGH, L. *Sci. Papers*, vol. III. 1902.
  - [52] RENARDY, Y., AND RENARDY, M. Prost : a parabolic reconstruction of surface tension for the volume-of-fluid method. *Journal of Computational Physics* 183, 2 (2002), 400–421.
  - [53] RIDER, W. J., AND KOTHE, D. B. Reconstructing volume tracking. *Journal of computational physics* 141, 2 (1998), 112–152.
  - [54] SAVART, F. Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Ann. Chim. Phys* 53, 337 (1833), 1833.

- [55] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annual review of fluid mechanics* 31, 1 (1999), 567–603.
- [56] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Analytical relations connecting linear interfaces and volume fractions in rectangular grids. *Journal of Computational Physics* 164, 1 (2000), 228–237.
- [57] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Interface reconstruction with least-square fit and split eulerian–lagrangian advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 41, 3 (2003), 251–274.
- [58] SCHULKES, R. The contraction of liquid filaments. *Journal of Fluid Mechanics* 309 (1996), 277–300.
- [59] SÉBILLEAU, J., LIMAT, L., AND EGGERS, J. Flow separation from a stationary meniscus. *Journal of Fluid Mechanics* 633 (2009), 137–145.
- [60] SIEROU, A., AND LISTER, J. R. Self-similar recoil of inviscid drops. *Physics of Fluids (1994-present)* 16, 5 (2004), 1379–1394.
- [61] SLOBOZHANIN, L. A., AND PERALES, J. M. Stability of liquid bridges between equal disks in an axial gravity field. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics (1989-1993)* 5, 6 (1993), 1305–1314.
- [62] STONE, H. A., AND LEAL, L. Relaxation and breakup of an initially extended drop in an otherwise quiescent fluid. *Journal of Fluid Mechanics* 198 (1989), 399–427.
- [63] SUSSMAN, M., ALMGREN, A. S., BELL, J. B., COLELLA, P., HOWELL, L. H., AND WELCOME, M. L. An adaptive level set approach for incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics* 148, 1 (1999), 81–124.
- [64] THOMSON, W. Hydrokinetic solutions and observations.(lord kelvin). In *Proc. Royal Soc* (1871), vol. 7, p. 63.
- [65] TIAHJADI, M., STONE, H., AND OTTINO, J. Satellite and subsatellite formation in capillary breakup. *Journal of Fluid Mechanics* 243 (1992), 297–317.
- [66] WEBER, C. Zum zerfall eines flüssigkeitsstrahles. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 11, 2 (1931), 136–154.
- [67] ZEFF, B. W., KLEBER, B., FINEBERG, J., AND LATHROP, D. P. Singularity dynamics in curvature collapse and jet eruption on a fluid surface. *Nature* 403, 6768 (2000), 401–404.



## CHAPITRE 6

### CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ce document traite de la dynamique des ligaments et de sa déstabilisation en gouttelettes lors des processus d'atomisation. Il a été mis en évidence (voir le chapitre 1) qu'il existe une étape commune à tout processus d'atomisation qui est celle de la formation de ligaments qui s'étirent et se fragmentent en gouttelettes. L'étude de la fragmentation des ligaments (segmentation capillaire) paraît donc une piste pertinente pour comprendre la création des gouttes lors des phénomènes de l'atomisation.

Nous avons commencé nos études sur la segmentation capillaire par le cas simple de la segmentation d'un ligament liquide axisymétrique, soumis à la tension de surface. La déstabilisation du ligament en gouttelettes est gouvernée par deux instabilités : soit par l'instabilité de Rayleigh-Plateau dans le cas du ligament très long (de rapport d'aspect infini), lorsque sa surface est perturbée par une longueur d'onde supérieure à son périmètre, soit par le phénomène du *end-pinching* pour le cas du ligament fini (avec la formation d'un bourrelet qui se rétracte et se segmente).

Autre que ces deux instabilités, nous avons mis en évidence un mécanisme qui empêche la segmentation, que nous avons nommé : phénomène d'évitement de l'étranglement. Ce phénomène est décrit dans le chapitre 3 sur la segmentation capillaire. Nous avons montré que ce phénomène coïncide, à chaque fois, avec un lâcher tourbillonnaire à l'intérieur du bourrelet et qu'il est intimement lié au nombre d'Ohnesorge du ligament. La valeur critique au delà de laquelle se produit ce phénomène a été évaluée à :  $Oh_c = 0.0025$ .

Des études expérimentales sur des mélanges d'eau et d'éthanol ont permis de valider l'existence de ce phénomène : détermination de la valeur approximative du nombre d'ohnesorge critique et l'observation du lâcher tourbillonnaire à l'intérieur du bourrelet.

Le plus important de ces résultats est d'utiliser ce phénomène d'évitement pour donner une structure à la frontière de Castrejón-Pita et al. [9] entre : le ligament se segmente en deux ou plusieurs gouttes et le ligament ne se segmente pas (c'est à dire qu'il se rétracte en une seule goutte). En fonction du nombre d'Ohnesorge du liquide, le ligament peut éviter une ou plusieurs fois avant de se segmenter. Ceci explique pourquoi la frontière dans le repère  $(L/R, Oh)$  de Castrejón-Pita est une courbe croissante. Plus le ligament est visqueux, plus il évite, et plus le ligament évite, plus il aura besoin d'être long pour pouvoir se segmenter.

Pour expliquer le lâcher tourbillonnaire lors du phénomène d'évitement, nous nous sommes focalisés sur l'écoulement à travers le cou du ligament. Cet écoulement est celui du Venturi capillaire : accélération de la vitesse au niveau du cou, correspondant à une diminution de la pression, puis décélération de la vitesse en amont et en aval du cou, correspondant à une surpression. Ce Venturi capillaire n'est rien d'autre que l'écoulement à travers un pont capillaire : le pont capillaire dynamique.

Nous avons dressé le diagramme de stabilité du pont capillaire, que nous avons validé avec les résultats de la littérature ([61, 32, 38, 35]) dans le cas statique. La différence entre le pont capillaire dynamique et les études classiques de la stabilité du pont capillaire, est l'ajout d'un nouveau paramètre : le débit à travers le pont. Le pont capillaire est instable pour deux raisons différentes : soit à cause de l'instabilité de Rayleigh-Plateau, par ce que sa surface est perturbée par une longueur d'onde supérieure à son périmètre, soit parce que pour un rapport d'aspect donné, son volume décroît, et dans ce cas il existe une bifurcation de type collision d'équilibres (également nommée *saddle-node*), qui conduit à la disparition de la solution stable. L'étude de la bifurcation du pont capillaire dynamique regorge de comportements : pour un rapport d'aspect donné, nous avons observé des claquages immédiats, dès lors qu'on soumet le pont à un débit. Par contre lorsque le volume du pont est proche du volume du cylindre liquide, alors le pont subit des oscillations non linéaires avant son claquage.

Des comparaisons ont été faites avec les équations 1D de Eggers & Dupont [16] (voir chapitre 4) et montrent de très bons accords lorsque le rapport d'aspect du pont est suffisamment grand. Dans le cas des volumes faibles, le diagramme de bifurcation des équations 1D admet une seule branche avec un point de bifurcation de type *saddle-node*, où le pont initialement stable passe en régime instable et claque. Dans le cas des volumes proches du cylindre liquide, le diagramme de bifurcation du modèle 1D admet une seconde branche de solutions stationnaires, avec un régime d'instabilité du type *Hopf*, qui va correspondre aux oscillations observées dans nos simulations (avec les équations axisymétriques de Navier-Stokes).

Une autre observation importante à signaler sur le pont capillaire est le phénomène d'évitement pour des rapports d'aspects  $L/R = 2, 3, 4$  pour des volumes proches du cylindre liquide (exemple du cas de  $L/R = 3$  pour les volumes  $V/V_0 = 0.9373, 0.9686$ , dans le chapitre 4). Après les oscillations, quand finalement le pont tend vers le claquage, on observe une réouverture soudaine du cou du pont. Cette réouverture n'est rien d'autre que de l'évitement.

Enfin nous avons présenté nos études expérimentales sur le pont capillaire dynamique. Quelques comparaisons avec nos simulations ont également été présentées et sont encourageantes.

## 6.1 Perspectives

### 6.1.1 Études expérimentales sur le pont capillaire

Nous avons présenté dans le chapitre 3 quelques résultats sur nos études expérimentales du pont capillaire. Ces résultats confirment qualitativement nos observations numériques. Mais il reste encore du travail à faire notamment sur les études quantitatives qui requièrent beaucoup plus de précisions sur nos techniques de mesures.

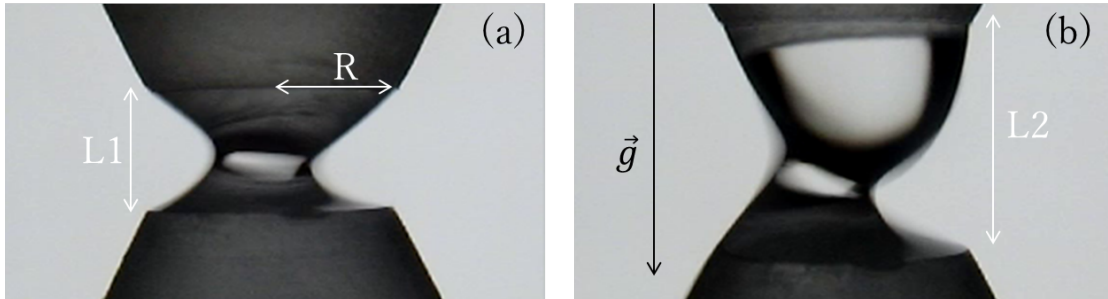


FIGURE 6.1 – Observations des oscillations circulaires du pont capillaire lorsque le débit devient grand. (a) :  $Q = 20\text{ml/s}$ ,  $L1/R \approx 1$ ,  $V_{c2} \approx 0.5$ . (b) :  $Q = 20\text{ml/s}$ ,  $L2/R \approx 1.8$ ,  $V_{c2} \approx 0.63$ .

Par ailleurs, l'étude expérimentale du pont capillaire dynamique nous offre d'autres comportements que nous n'avons pas observé dans nos simulations. C'est le cas par exemple des oscillations circulaires du pont (voir la figure 6.1), qui sont des effets 3D et qui sont donc impossibles à observer dans nos simulations qui sont faites en axisymétrie. La figure 6.1 montre le cas de deux ponts, de rapports d'aspect différents mais soumis au même débit, avec  $V_c$  le volume critique des oscillations. On peut remarquer sur les captures de la figure 6.1, la forme particulière de l'interface du pont (perte de symétrie,



surface du pont cisailée) qui est une conséquence de ces oscillations circulaires.

Il serait aussi intéressant de regarder le cas du pont capillaire entre deux tubes de diamètres différents.

### 6.1.2 Distribution de la taille des gouttes dans les jets

La distribution de la taille des gouttes dans les jets est importante dans plusieurs domaines.

En océanographie la statistique du nombre et de la taille des gouttes/bulles est essentielle pour comprendre les échanges climatiques entre l'océan et l'atmosphère. Les échanges gazeux à l'interface air-eau sont facilités par les aérosols : les gaz dissous dans l'océan sont libérés par évaporation. Ces aérosols sont responsables par exemple de la formation des cristaux de sels (qui jouent le rôle de noyaux pour les gouttes de pluie) et des cristaux de glace dans l'atmosphère.

Dans l'industrie du champagne, les bulles ont un rôle essentiel dans les qualités gustatives de la boisson. Lorsqu'elles montent dans le verre, elles se chargent en molécules aromatiques qui se diffusent lors de l'explosion de la bulle en surface. On comprends par là que la taille et la quantité de bulles ont une influence sur la diffusion aromatique du champagne.

La remontée de ces arômes de champagne jusqu'à nos nez, provient de l'éclatement des bulles à l'interface liquide/air du champagne. Cet éclatement induit un jet qui se fragmente pour donner des gouttes de taille microscopique, qui en s'évaporant diffusent les arômes qu'ils contiennent. Ces jets ont été étudiés récemment par Ghabache et al. [18] (2014). Je reprends ici, deux de leurs expériences (figure 6.2) réalisées dans les mêmes conditions.

La première ligne de l'image est une séquence temporelle du jet issu de l'éclatement d'une bulle dans de l'eau (voir [18], figure 1) à la température ambiante ( $\mu \approx 12 \text{ mPas}$ ,  $\sigma \approx 72 \text{ mNm}^{-1}$ , et  $\rho \leq 1000 \text{ kgm}^{-3}$ ). Il y a deux phases dans ce jet, la phase d'impulsion où le jet s'élève avec une vitesse de front liée à la forme de la cavité. Pendant cette phase, le ligament s'étire et segmente pour donner un train de gouttelettes : c'est ce que l'on observe ici sur la première ligne de la figure 6.2. Puis la vitesse de front du jet tend à s'annuler, on entame alors la seconde phase du jet où on a une compétition entre la capillarité (le ligament qui se rétracte) et la vitesse du jet (le ligament s'étire). Nous avons montré dans le chapitre 2 que des phénomènes d'évitements peuvent survenir pendant cette seconde phase. Sur la figure 6.2, cette deuxième phase ne concerne que la dernière colonne de la séquence. On remarque ici que les gouttes de la fragmentation du jet sont à peu près de la même taille (première ligne de la figure 6.2).

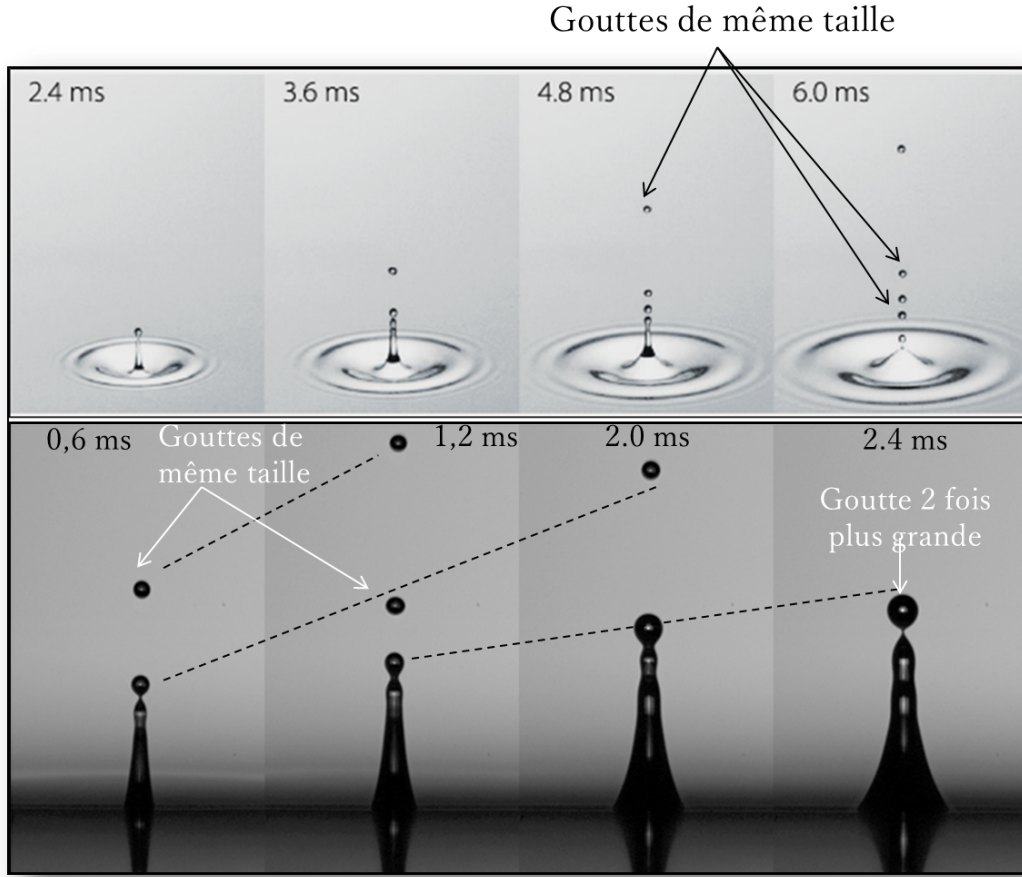


FIGURE 6.2 – Fragmentation d’un jet issu de l’éclatement d’une bulle à la surface d’un bain liquide [18]. Fragmentation du jet en un train de gouttelettes de même taille environ (première expérience : première ligne). Dans la deuxième expérience (deuxième ligne), la troisième goutte du jet fait environ 2 fois la taille des deux premières.

La deuxième séquence (deuxième ligne de la figure 6.2) est issue d’une solution dont les caractéristiques sont :  $\rho = 1047 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\sigma = 47 \text{ m N m}^{-1}$ ,  $\mu = 2.6 \text{ m Pas}$ . Cette solution est un peu plus visqueuse que la première. Pendant la première phase du jet, on observe la création de deux premières gouttes qui sont à peu près de même taille. À partir de la quatrième image de la séquence, le jet entre dans sa seconde phase. La troisième goutte va alors subir deux évitements successifs de l’étranglement et grossir en volume pour finalement se détacher avec une taille environ deux fois supérieure aux deux premières gouttes. On le voit plus clairement sur la figure 6.3. On comprend alors que le phénomène d’évitement est une piste sérieuse pour expliquer la distribution de la taille des gouttes dans les jets. Le cas du ligament cylindrique est un cas simple (car les paramètres  $L/R$  et  $Oh$  sont bien définis) qui nous permettra de comprendre les cas

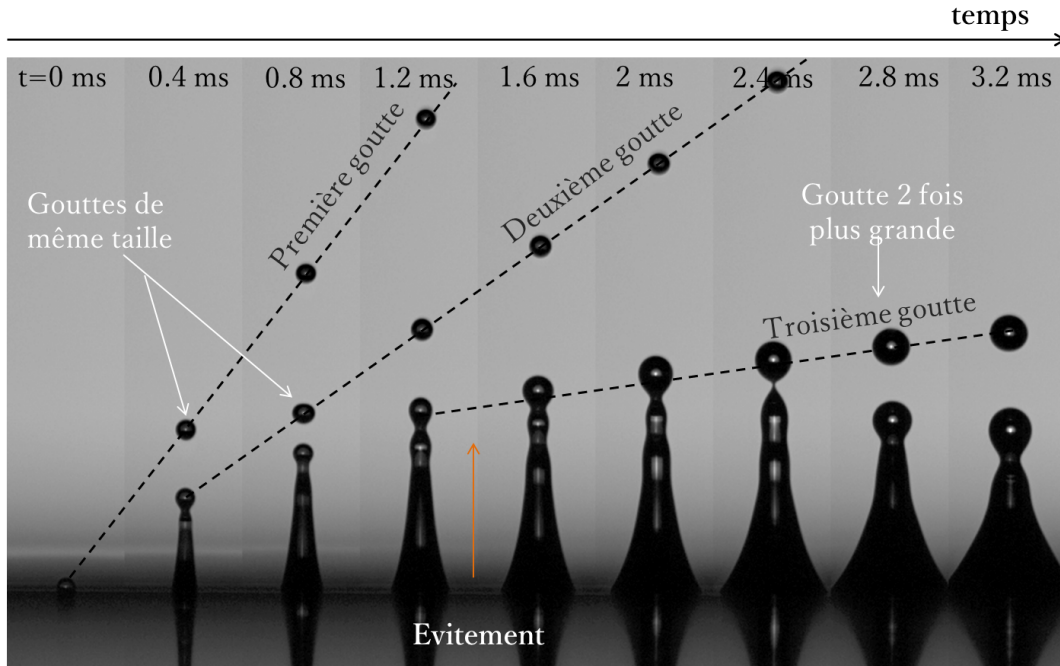


FIGURE 6.3 – Séquence temporelle plus détaillée de la fragmentation du jet dans la deuxième expérience [18]. Observation du phénomène d'évitement, responsable du grossissement de la troisième goutte du jet.

plus complexes comme ici lors d'un jet issu de l'éclatement d'une bulle à la surface de l'eau. Dans ces jets, la forme du ligament n'est pas bien définie, la vitesse initiale du front du jet dépend de la forme de la cavité qui l'engendre et des propriétés du liquide. Cette vitesse, pour une cavité donnée dépend également du temps. D'autres paramètres comme la vitesse des gouttes créées ainsi que leurs rayons, mais également le nombre de Bond, rendent plus complexe la transposition des résultats du cas du cylindre liquide aux cas des jets quelconques.

- [1] ANTKOWIAK, A., BREMOND, N., LE DIZES, S., AND VILLERMAUX, E. Short-term dynamics of a density interface following an impact. *Journal of Fluid Mechanics* 577 (2007), 241–250.
- [2] AULISA, E., MANSERVISI, S., SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Interface reconstruction with least-squares fit and split advection in three-dimensional cartesian geometry. *Journal of Computational Physics* 225, 2 (2007), 2301–2319.
- [3] BAYVEL, L., AND ORZECOWSKI, Z. Liquid atomization, combustion : An international series, 1993.
- [4] BELL, J. B., AND MARCUS, D. L. A second-order projection method for variable-density flows. *Journal of Computational Physics* 101, 2 (1992), 334–348.
- [5] BLANCHARD, D. C., AND HEINRICH, B. C. *From raindrops to volcanoes*. Doubleday Garden City, NY, 1967.
- [6] BRACKBILL, J., KOTHE, D. B., AND ZEMACH, C. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of computational physics* 100, 2 (1992), 335–354.
- [7] BREMOND, N. *Stabilité et atomisation des nappes liquides*. PhD thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I, 2003.
- [8] BRENNER, M. P., AND GUEYFFIER, D. On the bursting of viscous films. *Physics of Fluids* 11 (1999), 737–739.
- [9] CASTREJÓN-PITA, A. A., CASTREJON-PITA, J., AND HUTCHINGS, I. Breakup of liquid filaments. *Physical review letters* 108, 7 (2012), 074506.
- [10] CHORIN, A. J. On the convergence of discrete approximations to the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation* 23, 106 (1969), 341–353.

- [11] CONRATH, M., CANFIELD, P., BRONOWICKI, P., DREYER, M. E., WEISLOGEL, M. M., AND GRAH, A. Capillary channel flow experiments aboard the international space station. *Physical Review E* 88, 6 (2013), 063009.
- [12] CULICK, F. Comments on a ruptured soap film. *Journal of applied physics* 31, 6 (1960), 1128–1129.
- [13] DE LA GRANGE, J. L. *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés : avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques*. Bachelier, 1826.
- [14] DRIESSEN, T., JEURISSEN, R., WIJSHOFF, H., TOSCHI, F., AND LOHSE, D. Stability of viscous long liquid filaments. *Physics of Fluids (1994-present)* 25, 6 (2013), 062109.
- [15] EGGERS, J. Universal pinching of 3d axisymmetric free-surface flow. *Physical Review Letters* 71, 21 (1993), 3458.
- [16] EGGERS, J., AND DUPONT, T. F. Drop formation in a one-dimensional approximation of the navier–stokes equation. *Journal of fluid mechanics* 262 (1994), 205–221.
- [17] FRANCOIS, M. M., CUMMINS, S. J., DENDY, E. D., KOTHE, D. B., SICILIAN, J. M., AND WILLIAMS, M. W. A balanced-force algorithm for continuous and sharp interfacial surface tension models within a volume tracking framework. *Journal of Computational Physics* 213, 1 (2006), 141–173.
- [18] GHABACHE, E., ANTKOWIAK, A., JOSSEAND, C., AND SÉON, T. On the physics of fizziness : How bubble bursting controls droplets ejection. *Physics of Fluids (1994-present)* 26, 12 (2014), 121701.
- [19] GUEYFFIER, D., LI, J., NADIM, A., SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *Journal of Computational Physics* 152, 2 (1999), 423–456.
- [20] HARVIE, D. J., DAVIDSON, M., AND RUDMAN, M. An analysis of parasitic current generation in volume of fluid simulations. *Applied mathematical modelling* 30, 10 (2006), 1056–1066.
- [21] HOYT, J. W., AND TAYLOR, J. Waves on water jets. *Journal of Fluid Mechanics* 83, 01 (1977), 119–127.
- [22] JAMES, A., VUKASINOVIC, B., SMITH, M. K., AND GLEZER, A. Vibration-induced drop atomization and bursting. *Journal of Fluid Mechanics* 476 (2003), 1–28.

- [23] KELLER, H. Lectures on numerical methods in bifurcation problems. *Applied Mathematics* 217 (1987), 50.
- [24] KELLER, J. B. Breaking of liquid films and threads. *Physics of Fluids (1958-1988)* 26, 12 (1983), 3451–3453.
- [25] KELLER, J. B., AND MIKSI, M. J. Surface tension driven flows. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 43, 2 (1983), 268–277.
- [26] KUBITSCHKE, J., AND WEIDMAN, P. Helical instability of a rotating liquid jet. *Physics of Fluids* 20, 9 (2008), 91104.
- [27] LAFAURIE, B., NARDONE, C., SCARDOVELLI, R., ZALESKI, S., AND ZANETTI, G. Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with surfer. *Journal of Computational Physics* 113, 1 (1994), 134–147.
- [28] LAPLACE, P. S. *Traité de mécanique céleste/par PS Laplace...; tome premier [-quatrième]*, vol. 4. de l’Imprimerie de Crapelet, 1805.
- [29] LHUISSIER, H., AND VILLERMAUX, E. Soap films burst like flapping flags. *Physical review letters* 103, 5 (2009), 054501.
- [30] LI, J. Calcul d’interface affine par morceaux. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, astronomie* 320, 8 (1995), 391–396.
- [31] LI, J. *Résolution numérique de l’équation de Navier-Stokes avec reconnection d’interfaces. Méthode de suivi de volume et application à l’atomisation.* PhD thesis, 1996.
- [32] LOWRY, B. J., AND STEEN, P. H. Stability of slender liquid bridges subjected to axial flows. *Journal of Fluid Mechanics* 330 (1997), 189–213.
- [33] MADDOKS, J. H. Stability and folds. *Archive for Rational mechanics and Analysis* 99, 4 (1987), 301–328.
- [34] MARMOTTANT, P. *Atomisation d’un liquide par un courant gazeux.* PhD thesis, Grenoble, INPG, 2001.
- [35] MARTÍNEZ, I., AND PERALES, J. Liquid bridge stability data. *Journal of crystal growth* 78, 2 (1986), 369–378.
- [36] MESEGUER, J. The influence of axial microgravity on the breakage of axisymmetric slender liquid bridges. *Journal of crystal growth* 62, 3 (1983), 577–586.
- [37] M’KENDRICK, J. G. Helmholtz in berlin—physical researches continued [1].
- [38] MYSHKIS, A., BABSKII, V., KOPACHEVSKII, N., SLOBOZHANIN, L., TYUPTSOV, A., AND WADHWA, R. Low-gravity fluid mechanics. *Translated from the*

- Russian by Wadhwa, RS, XIX, 583 pp. 218 figs.. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1 (1987).*
- [39] NIKITOPOULOS, D. E., AND KELLY, A. J. Formation of a net-negative charged liquid spray. *Physics of Fluids (1994-present)* 12, 9 (2000), S7–S7.
  - [40] NOTZ, P. K., AND BASARAN, O. A. Dynamics and breakup of a contracting liquid filament. *Journal of Fluid Mechanics* 512 (2004), 223–256.
  - [41] PLATEAU, J. *Acad. Sci.*, vol. XVI. Bruxelles Mém., 1843.
  - [42] PLATEAU, J. *Acad. Sci.*, vol. XXIII. Bruxelles Mém., 1849.
  - [43] PLATEAU, J. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, vol. 2. Gauthier-Villars, 1873.
  - [44] POPINET, S. Gerris : a tree-based adaptive solver for the incompressible euler equations in complex geometries. *Journal of Computational Physics* 190, 2 (2003), 572–600.
  - [45] POPINET, S. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *Journal of Computational Physics* 228, 16 (2009), 5838–5866.
  - [46] POPINET, S., AND ZALESKI, S. A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 30, 6 (1999), 775–793.
  - [47] QUERE, D., DE GENNES, P., BROCHARD-WYART, F., AND REISINGER, A. Capillarity and wetting phenomena : Drops, bubbles, pearls, waves, 2004.
  - [48] RAYLEIGH, L. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proceedings of the London Mathematical Society* 1, 1 (1879), 57–72.
  - [49] RAYLEIGH, L. Some applications of photography. *Nature* 44, 1133 (1891), 249–254.
  - [50] RAYLEIGH, L. *Sci. Papers*, vol. I. 1899.
  - [51] RAYLEIGH, L. *Sci. Papers*, vol. III. 1902.
  - [52] RENARDY, Y., AND RENARDY, M. Prost : a parabolic reconstruction of surface tension for the volume-of-fluid method. *Journal of Computational Physics* 183, 2 (2002), 400–421.
  - [53] RIDER, W. J., AND KOTHE, D. B. Reconstructing volume tracking. *Journal of computational physics* 141, 2 (1998), 112–152.
  - [54] SAVART, F. Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Ann. Chim. Phys* 53, 337 (1833), 1833.

- [55] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annual review of fluid mechanics* 31, 1 (1999), 567–603.
- [56] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Analytical relations connecting linear interfaces and volume fractions in rectangular grids. *Journal of Computational Physics* 164, 1 (2000), 228–237.
- [57] SCARDOVELLI, R., AND ZALESKI, S. Interface reconstruction with least-square fit and split eulerian–lagrangian advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 41, 3 (2003), 251–274.
- [58] SCHULKES, R. The contraction of liquid filaments. *Journal of Fluid Mechanics* 309 (1996), 277–300.
- [59] SÉBILLEAU, J., LIMAT, L., AND EGGERS, J. Flow separation from a stationary meniscus. *Journal of Fluid Mechanics* 633 (2009), 137–145.
- [60] SIEROU, A., AND LISTER, J. R. Self-similar recoil of inviscid drops. *Physics of Fluids (1994-present)* 16, 5 (2004), 1379–1394.
- [61] SLOBOZHANIN, L. A., AND PERALES, J. M. Stability of liquid bridges between equal disks in an axial gravity field. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics (1989-1993)* 5, 6 (1993), 1305–1314.
- [62] STONE, H. A., AND LEAL, L. Relaxation and breakup of an initially extended drop in an otherwise quiescent fluid. *Journal of Fluid Mechanics* 198 (1989), 399–427.
- [63] SUSSMAN, M., ALMGREN, A. S., BELL, J. B., COLELLA, P., HOWELL, L. H., AND WELCOME, M. L. An adaptive level set approach for incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics* 148, 1 (1999), 81–124.
- [64] THOMSON, W. Hydrokinetic solutions and observations.(lord kelvin). In *Proc. Royal Soc* (1871), vol. 7, p. 63.
- [65] TJAHHADI, M., STONE, H., AND OTTINO, J. Satellite and subsatellite formation in capillary breakup. *Journal of Fluid Mechanics* 243 (1992), 297–317.
- [66] WEBER, C. Zum zerfall eines flüssigkeitsstrahles. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 11, 2 (1931), 136–154.
- [67] ZEFF, B. W., KLEBER, B., FINEBERG, J., AND LATHROP, D. P. Singularity dynamics in curvature collapse and jet eruption on a fluid surface. *Nature* 403, 6768 (2000), 401–404.





## CHAPITRE 7

ANNEXES

### Sommaire

<b>7.1</b>	<b>Les fichiers de paramètres Gerris . . . . .</b>	<b>165</b>
<b>7.2</b>	<b>Code Matlab . . . . .</b>	<b>172</b>

Pour tourner ce code, il vous faut installer préalablement le logiciel *Gerris Flow Solver* sur votre machine avec *GfsView* pour la visualisation. Ensuite, enregistrer les lignes de codes ci-après dans un fichier avec un nom portant l'extension *.gfs*. Et enfin exécuter le code dans un terminal par la commande `gerris2D -m Nom-du-fichier.gfs`.

## 7.1 Les fichiers de paramètres Gerris

### 7.1.1 Segmentation capillaire

Ci dessous le fichier de paramètre *Gerris* pour la simulation de ligament cylindrique semi-infini (de longueur  $L = 47.5R$ ) avec un bout hémisphérique de rayon  $R = 1$ . La simulation est en axisymétrie, la longueur des boîtes de *Gerris* est 5 et la taille de la plus petite cellule est :  $5/2^9$ . Les propriétés physiques imposées ici pour le ligament sont  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 1$ , et  $\mu = 0.01$ . Ce ligament est entouré par un fluide non visqueux et cent fois moins dense. Le temps de calcul est d'environ une journée sur un processeur *AMD Opteron(tm) Processor 6282 SE* pour ce cas  $Oh = 0.01$ .

```
10 9 GfsAxi GfsBox GfsGEdge {} {  
Time {end =30}
```

VariableTracerVOF T

PhysicalParams {alpha = 1./(T + (1. - T)\*0.01) L = 5}

SourceViscosity ((0.01)\*T + 0\*(1. - T))

VariableCurvature K T

SourceTension T 1. K

Refine 9

InitFraction T ((x>=1)? (1-y):1-(x-1)\*(x-1)-y\*y)

Variable F

Init {istep=1} {F= (dx("V")-dy("U"))\*T}

AdaptGradient { istep = 1 } { cmax = 1e-2 minlevel = 3 maxlevel =9} T

GfsAdaptFunction { istep = 1 } { minlevel = 3 maxlevel =9 cmax = 0.01}  
(T > 0 && T < 1 ? 1. : fabs(F)\*ftt\_cell\_size (cell))

AdaptFunction { istep = 1 } { cmax = 0.1 maxlevel =9 minlevel = 3 }  
{return (T > 0. && T < 1.) ? ftt\_cell\_size (cell)\*fabs (K) : 0.; }

OutputTime{step = 0.1} stderr

OutputSimulation {step = 0.1 } temps-%3.1f.gfs

# OutputSimulation { step = 0.1 } stdout

}

GfsBox {}

GfsBox {}

GfsBox {}

GfsBox {}

GfsBox {}

GfsBox {}

GfsBox {}

```
GfsBox {}
GfsBox {}
GfsBox {}
```

```
1 2 right
2 3 right
3 4 right
4 5 right
5 6 right
6 7 right
7 8 right
8 9 right
9 10 right
```

### 7.1.2 Rétractation de cône liquide

Le cône liquide a ici un angle  $\theta = 0.22$  *radian*, et une hauteur  $z = 30$ . Le domaine de simulation est constitué de deux boîtes de *Gerris*, de longueur 20. Le cône liquide (de densité  $\rho = 1$ , de viscosité nulle  $\mu = 0$ , de tension de surface  $\sigma = 1$ ) est entouré d'un liquide non visqueux et cent fois moins dense. La pointe du cône a été légèrement raccourci par un bout sphérique, pour limiter le niveau de maillage au niveau de la pointe. Les simulations sont en axisymétrie. Le maillage est adaptatif et le niveau de raffinement le plus élevé est  $l_{max} = 11$ , la taille de la plus petite cellule est donc égale à  $20/2^{11}$ .

```
Define theta 0.22
Define l 20
Define lc 1.5*l
Define n 0.01
Define hc lc*tan(theta)
Define rc n*lc*cos(M_PI/2-theta)/(sin(M_PI/2-theta)*sin(M_PI/2-theta))
Define xs n*lc-rc*cos(M_PI/2-theta)

2 1 GfsAxi GfsBox GfsGEdge {} {
Time { end = 5 }
```

VariableTracerVOFHeight T

PhysicalParams { alpha = 1./(T + (1. - T)\*0.01) L = 1 }

VariableCurvature K T Kmax

SourceTension T 1. K

Refine 11

InitFraction T ((x>=n\*lc)? x-tan(M\_PI/2-theta)\*y:rc\*rc-(x-xs)\*(x-xs)-y\*y ){}

Variable F

Init {step=0.1} {F= (dx("V")-dy("U"))\*T}

AdaptGradient { istep = 1 } { cmax = 1e-2 minlevel = 4 maxlevel =11} T

GfsAdaptFunction { istep = 1 } { minlevel = 3 maxlevel =11 cmax = 0.01 }  
(T > 0 && T < 1 ? 1. : fabs (F)\*ftt\_cell\_size (cell))

AdaptFunction { istep = 1 } { cmax = 0.1 maxlevel = 11 minlevel = 3 }  
{ return (T > 0.  
&& T < 1.) ? ftt\_cell\_size (cell)\*fabs (K) : 0.; }

OutputTime {step = 0.1} stderr

OutputSimulation {step = 0.05 } temps-%3.1f.gfs {}

# OutputSimulation {step = 0.05 } stdout

}

GfsBox {}

GfsBox {right= Boundary {BcAngle T (M\_PI/2-theta)\*180/M\_PI }}

1 2 right

### 7.1.3 Le pont capillaire dynamique

Les deux tubes du pont de rayon intérieur  $R$  ont une épaisseur  $d = 2r = 0.05$  et une longueur  $l$ . La distance entre ces deux tube,  $L$ , est égale à la longueur du pont capillaire. La condition initiale du pont est un cylindre liquide de rapport d'aspect  $L/(R + r)$  entre les deux tubes, entouré par un fluide 100 fois moins visqueux et 100 fois moins dense. Les propriétés physiques du liquide sont ( $\sigma = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $\mu = 0.01$ ) avec  $\mu$  la viscosité dynamique.  $n$  désigne le temps du pompage tandis que  $trelax$  désigne le temps de relaxation du pont après l'arrêt du pompage, enfin  $Sm$  désigne le volume  $V_0$  du pont.

```

Define n 14.
Define umax ((t<n)? 0.1:0.)
Define trelax 50
Define us (10/(3000-0.))*(t-(n+trelax))
Define rho 1.
Define R 1.
Define mu 0.01
Define We 1
Define Re 100.
Define Bo 0.0
Define r 0.025
Define d 2*r
Define ref 6
Define l (1.+r)
Define Sm ((x>=-1)&& (x<=(3*l))? T:0.)
Define minl 2

14 19 GfsAxi GfsBox GfsGEdge {} {
Time {end =500}

VariableTracerVOFHeight T

PhysicalParams {alpha = 1./(rho*T + (1.-T)*0.01*rho)}

SourceViscosity (mu*T + 0.01*mu*(1.-T))

VariableCurvature K T

```

Source {} U (Bo/0.99)

SourceTension T 1. K

Refine 6

```
RefineSolid (((x-3*l-r)*(x-3*l-r)+(y-(l+r))*(y-(l+r)))<=d*d ||
((x+l+r)*(x+l+r)+(y-(l+r))*(y-(l+r)))<=d*d)? 7:minl)
```

```
GfsSolid ((x<=-l-r)&(y>=1)&(y<=1.+2.*r)? (-1.-2*r+y): -r*r+
(x+l+r)*(x+l+r)+(y-1.-r)*(y-1.-r))
```

```
GfsSolid ((x>=3*l+r)&(y>=1)&(y<=1.+2.*r)? (-1.-2*r+y): -r*r+
(x-3*l-r)*(x-3*l-r)+(y-1.-r)*(y-1.-r))
```

InitFraction T (1.+r-y)

Variable F

```
Init {istep=1} {F= (dx("V")-dy("U"))*T}
```

```
AdaptGradient {istep =1} { cmax =0.01 minlevel = minl maxlevel =ref} T
```

```
AdaptGradient {istep =1} { cmax =0.01 minlevel = minl maxlevel =ref} Sm
```

```
GfsAdaptFunction {istep =1} { minlevel = minl maxlevel =ref cmax = 0.1 } (T > 0
&& T < 1 ? 1. : fabs(F)*ftt_cell_size(cell))
```

```
AdaptFunction {istep =1} { cmax = 0.01 maxlevel = ref minlevel = minl }
{return (T > 0. && T < 1.) ? ftt_cell_size(cell)*fabs(K): 0.;}
```

```
AdaptFunction {istep =1 }{ maxlevel=5 minlevel =minl cmax=0.01}
{ return ((x<=-2.25 && y<=1)|| (x>=4.25 && y<=1))?1. : 0.; }
```

```

OutputTime{step = 0.1} stderr
OutputSimulation {step =5} n-ref-temps-%3.1f.gfs
OutputScalarSum { step = 0.1 } Sum-n{v = Sm}
# OutputSimulation { step = 0.1 } stdout
}
GfsBox {}
GfsBox {}
GfsBox {}
GfsBox {}
GfsBox {right= Boundary { BcDirichlet U ((y<=1)&&(t<=n)?
umax*(y-1.)*(-1.-y):(y<=1)&&(t>n+trelax)? us:0.) BcDirichlet V 0. }}
GfsBox {right = BoundaryInflowConstant - umax/2}
GfsBox {}
GfsBox {}
GfsBox {}
GfsBox {}
GfsBox {}
GfsBox {left = GfsBoundaryInflowConstant umax/2}
GfsBox {left = Boundary {BcDirichlet U ( (y<1.)&&(t<=n)?
-umax*(y-1.)*(-1.-y):(y<=1)&&(t>n+trelax)? us:0.) BcDirichlet V 0.}}
GfsBox {}

1 2 right
2 3 right
3 4 right
4 5 right
5 6 top
6 7 left
7 8 left
8 9 left
9 10 left
10 11 left
11 12 left
12 13 bottom
13 14 right

```



```

14 1 right
1 10 top
2 9 top
3 8 top
4 7 top
14 11 top

```

## 7.2 Code Matlab

### 7.2.1 Diagramme de bifurcation : code 1D des équations de Eggers & Dupont

Le code est exécutable sur le logiciel *Matlab*, version R2012a. Les paramètres principaux ( $R, L, V, V_0, \rho, \sigma, \mu$ ) sont définis au début du code. Le paramètre de bifurcation est le nombre de Weber qui initialement est nul. Dans le cas des volumes proches du cylindre liquide, pour déterminer les solutions stationnaires de la seconde branche de bifurcation, il faut réexécuter le code avec la une valeur de Weber légèrement supérieure à la valeur critique ( $We_1$ ) d'instabilité de la première branche.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%  BIFURCATION CODE FOR 1D MODEL OF A LIQUID BRIDGE  %%
%%
%%                                     March 2014                                     %%
%%  last update: plag&play version (A. Tripodi)      %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all; %close all
figure(8)

%% INPUT
% DATA
VL2=[0.53417 0.62714 0.72014 0.76665 0.81318 0.85972 0.90628 0.95286];
VL3=[0.56294 0.62528 0.68764 0.75001 0.81241 0.84362 0.87484 0.90606 ...
      0.93731 0.96859];
VL4=[0.672 0.71873 0.76547 0.81223 0.85901 0.88241 0.90581 0.92923 ...
      0.95269 0.97637];
L=4;          % lenght

```

```

R=1;           % radius
dx=0.05;       % resolution
n=ceil(L/dx);  if mod(n,2)==1; n=n+1;end
rho=1;         % density
nu=0.01;       % viscosity
sig=1;         % surface tension
g=0;           % gravity
v0=pi*R^2*L;   % cylindrical volume
v=VL4(2)*v0;   % target volume
We=0.0;        % Weber number
U=sqrt(We);

% CONTROL & FLAG
flag='n';      % 'y' to let the code follow a second branch (if found), ...
               % 'n' otherwise
delta0=0.001;  % step-size control
del_dec=0.8;
del_inc=1.1;
deltamax=0.01;

disp('*****')
disp('*** BIFURCATION CODE ***')
disp('--- DATA ---')
fprintf('L: %1.1f \nR: %1.1f \nn:%4d \nnu: %1.2g \n',L,R,n,nu)
fprintf('vol: %1.5f \nWe: %1.3f \ndelta0: %1.4f \n',v/v0,We, delta0)
%% GRID, DERIVATION AND INTEGRATION
scale=-2/L;
[x,DM] = chebdif(n,3);
D=DM(:, :, 1)*scale;
DD=DM(:, :, 2)*scale^2;
DDD=DM(:, :, 3)*scale^3;
x=(x-1)/scale;
Z=zeros(n,n); I=eye(n);
INT=([diff(x)',0]+[0,diff(x)'])/2;
uloc=1:n;hloc=n+1:2*n;
Uloc=2*n+1;

```

```

%% INITIAL CONDITION
p=1;
h0=R*ones(n,1);
u0=U*ones(n,1);

sol=[u0; h0; U]; % initial guess, last position for bifurcation parameter
dir=[zeros(2*n,1);1]; % initial direction

%% MAIN LOOP

% INITIALIZATION
    delta=delta0;
    DET=0;pos_txt=0.8;
    change=zeros(1000,3);
    RES=zeros(10000,6);
    FIG=zeros(1000,2*n+1);

% BIFURCATION LOOP
disp('--- BIFURCATION LOOP ---')
ind=0;quitTOT=0;count2=0;count3=0;NB=0;
while ~quitTOT && ind<2500
    ind=ind+1;

    solprev=sol;
    sol=sol+dir*delta; % new prediction of solution

    %%% PLOTTING
    % figure(1);plot(x,solprev(hloc),'r',x,solprev(uloc),'b');
    % title(sprintf('vol=%1.3f pres=%1.3f',sol(vloc)/v0,p(1)));drawnow;
    % subplot 312;plot(atan(hp(1)),sol975(vloc)/v0,'r. '); hold on; drawnow;
    % figure(2);plot(4*solprev(Uloc)^2,min(solprev(hloc)),['.' co]);
    % hold on; drawnow;

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% NEWTON ITERATION
count=1; quit=0;
while quit<6

    % EXTRAPOLATION OF SOLUTION
    u=sol(uloc); h=sol(hloc); U=sol(Uloc);
    hp=D*h; hpp=DD*h; hppp=DDD*h; a=(1+hp.^2);
    up=D*u; upp=DD*u;

    % FUNCTION
    p=h.^-1.*a.^-0.5-hpp.*a.^-1.5;

    f=[ -u.*up-D*p/rho+3*nu*(D*(h.^2.*up)).*h.^-2-g; ...
        -u.*hp-0.5*up.*h; ...
        ];

    ff=[f;...
        dir'*(sol-solprev)-delta
        ];

    % JACOBIAN
    P=diag(-h.^-2.*a.^-0.5) ...
        +diag(3*hp.*hpp.*a.^-2.5-h.^-1.*hp.*a.^-1.5)*D ...
        +diag(-a.^-1.5)*DD;

    A=[-diag(up)-diag(u)*D+diag(6*nu./h.*hp)*D+3*nu*DD, -sig/rho*D*P-...
        diag(6*nu.*up.*hp./h.^2)+diag(6*nu.*up./h)*D; ...
        -diag(hp)-diag(h)*D/2, -diag(up)/2-diag(u)*D; ...
        ];

    AA=[A,zeros(2*n,1); ...
        dir'
        ];

```

```

% BOUNDARY CONDITION
cloc=[1,n+1,2,n];

ff(cloc)=[ ...
    u(1)-U; ...
    h(1)-R; ...
    h(n)-R; ...
    v-pi*INT*h.^2; ...
    ];

AA(cloc,:)= [ ...
    I(1,:),Z(1,:), -1; ...
    Z(1,:),I(1,:), 0; ...
    Z(n,:),I(n,:), 0; ...
    Z(1,:), -2*pi*INT.*h', 0; ...
    ];

% NEW SOLUTION
sol=sol-AA\ff;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% TEST OF CONVERCENCE
resi=norm(ff);
%disp([num2str(count) ' ' num2str(res)]);
if mod(count,20)==0||resi>1e5
    delta=delta*del_dec;sol=solprev+dir*delta; quit=quit+1;
    disp([ num2str(ind) '-> no convergence, decrease delta: '...
        num2str(delta)]);
    if quit==6; quitTOT=1; disp([ num2str(ind),...
        '-> ...no final convergence ...']); end
end
if resi<5e-6;
    disp(strcat(num2str(ind), '-> converged, iter: '...
        , num2str(count),', res: ', num2str(resi),' delta: ',...
        num2str(delta))); quit=10; continue; end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

        count=count+1;
    end
    if count<5 && delta<deltamax; delta=delta*del_inc;end %step-size increase
    %if sol(Uloc)<0; disp('---> Negative velocity <---');...
    %break; end % test for negative velocity

% NEW DIRECTION
dir=AA\[zeros(2*n,1);1]; % nouvelle direction
%dir=dir/max(abs(dir)); % normalization
dir=dir/norm(dir); % normalization

DETNM1=DET;
DET=det(AA);
if sign(DET)+sign(DETNM1)==0 && ~quitTOT;
    count2=count2+1;
    %subplot 313;text(0,pos_txt, strcat(['cambio segno a ', num2str(ind)]));
    %figure(2);plot(4*sol(Uloc)^2,min(sol(hloc)), 'sr');
    change(count2,:)= [sol(Uloc)^2,solprev(hloc(n/4)),min(sol(hloc))];
    pos_txt=pos_txt-0.1;
    if count2==1 && flag=='y'
        [V_OLD,S]=eig(AA);
        s=diag(S); [t,o]=sort(abs(real(s))); s=s(o); V=V_OLD(:,o);
        remm=abs(s)>400; s(remm)=[]; V(:,remm)=[];
        dir_NB1=real(V(:,1));
        dir_NB2=real(V(:,2));
    end
end

A(cloc,:)= [ ...
    I(1,:),Z(1,:); ...

```

```

    Z(1,:),I(1,:); ...
    Z(n,:),I(n,:); ...
    Z(1,:), -20.81241*pi*INT.*h'; ...
    ];
E=blkdiag(I,I);
E(cloc,:)=0;
[V_OLD,S]=eig(A,E);
s=diag(S); [t,o]=sort(-real(s)); s=s(o); V=V_OLD(:,o);
remm=abs(s)>400; s(remm)=[]; V(:,remm)=[];

%TEXT(:,2)={ [min(h)]; [4*U^2]; [pi*INT*h.^2/v0]; [ind] };
%subplot 325;plot(ind,real(s(1)),'bo');hold on;drawnow;
%subplot 325;plot(ind,atan(hp(1))*180/pi,'bo');hold on;drawnow;
%subplot 313;axis off;set(txt2,'string',TEXT(:,2));drawnow

if mod(ind,200)==0
    count3=count3+1;
    FIG(count3,:)=sol;
end
sp=x(sol(hloc)==min(sol(hloc)));
sol1s4=interp1(x,solprev(hloc),L/4);
sol3s4=interp1(x,solprev(hloc),3*L/4);

RES(ind,:)= [abs(solprev(Uloc)),sol1s4,sol3s4,min(solprev(hloc)),s(1),sp(1)];
if ind==1; initial=[x sol(hloc) sol(uloc)]; end

%plot(RES(:,1).^2,RES(:,4),'b.')
%hold on; plot(RES(:,1).^2,RES(:,2),'r.')
%hold on;
plot(RES(:,1).^2,RES(:,4),'r.')
title(['L: ' num2str(L) ', V: ' num2str(v/v0) ', nu: ' num2str(nu)])
xlabel('Weber')

```

```

ylabel('H_{min}')
grid on
drawnow

end
%break
RES=RES(2:ind,:);
FIG=FIG(1:count3,:);
change=change(1:count2,:);

if NB==1;disp('...waiting for 2nd branch data...');
    wait(job1); load(job1,'RES_NB1','FIG_NB1');
    RES=[RES;RES_NB1];FIG=[FIG;FIG_NB1]; delete(job1);% !rm temp.mat
    wait(job2); load(job2,'RES_NB2','FIG_NB2');
    RES=[RES;RES_NB2];FIG=[FIG;FIG_NB2]; delete(job2);% !rm temp.mat
end
disp('--- SIMULATION END ---')

disp('--- PLOTTING ---')
%save(['RES33_L' num2str(L) 'V' num2str(v/v0) 'nu' num2str(nu) '.mat'],'RES')

%figure; plot(RES(:,1).^2,RES(:,5),'b.')
%    hold on;

s1=0;s2=0;s3=0; %P1=NaN; P2=NaN;P3=NaN;
for j=1:size(RES,1)
    if real(RES(j,5))>1e-4
        if isreal(RES(j,5))
            s1=s1+1; P1(s1)=RES(j,1).^2; Q1(s1)=RES(j,4);
        else
            s2=s2+1; P2(s2)=RES(j,1).^2; Q2(s2)=RES(j,4);
        end
    else

```



```

        s3=s3+1; P3(s3)=RES(j,1).^2; Q3(s3)=RES(j,4);
    end
end
title(['L: ' num2str(L) ', V: ' num2str(v/v0) ', nu: ' num2str(nu)])
xlabel('Weber')
ylabel('H_{min}')
grid on
% h = findobj('type', 'line', 'marker', '.', 'color', 'r');
% xx = get(h, 'XData')
% yy = get(h, 'YData')
if s1==0; P1=NaN; Q1=NaN; R1=NaN; end
if s2==0; P2=NaN; Q2=NaN; R2=NaN; end
if s3==0; P3=NaN; Q3=NaN; R3=NaN; end

figure(10)
plot(P1,Q1,'r.','LineWidth',3)
hold on; plot(P2,Q2,'g.','LineWidth',3)
hold on; plot(P3,Q3,'b.','LineWidth',3)
title(['L: ' num2str(L) ', V: ' num2str(v/v0) ', nu: ' num2str(nu)])
xlabel('Weber number')
ylabel('Neck radius')
ylim([0 1.01])
grid on
disp('--- FINISHED ---')

```

